Interaktivna računalna grafika - zadaci s ferka

Autor: Cvija

August 31, 2020

Uvod

Neslužbeni studentski dokument.

Napravio student s ciljem lakšeg prolaska predmeta Interaktivna računalna grafika na Fakultetu Elektrotehnike i Računarstva i učenja Latex-a.

Svi zadaci su riješeni i objašnjeni redom kako su i zadani na ferku, a u dokumentu nisu navedeni jedini načini rješavanja zadataka, postoje i drugi.

Ako želite pokušati zadatke napisane Java appletima rješavati na Chromeu, posjetite ovu web stranicu:
https://www.lifewire.com/how-to-enable-java-in-chrome-4770854

Za ostale pretraživače:
https://java.com/en/download/help/enable_browser.xml

Chrome i ostali pretraživači ne garantiraju da će vam se rješenja upisati u sustav ferko, jedini pretraživač koji vam to omogućuje je **Internet Explorer** na Windows 7 i starijima.

Službena literatura: Knjiga M. Čupić, Ž. Mihajlović, *Interaktivna Računalna Grafika Kroz Primjere u OpenGL-u*, 17. listopad 2018.
http://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/knjiga.pdf Preporuka je prije svakog rješavanja zadatka proučiti literaturu za potpuno razumijevanje.
Najnoviju verziju možete pronaći na https://github.com/Cvija2609/irg_ferko

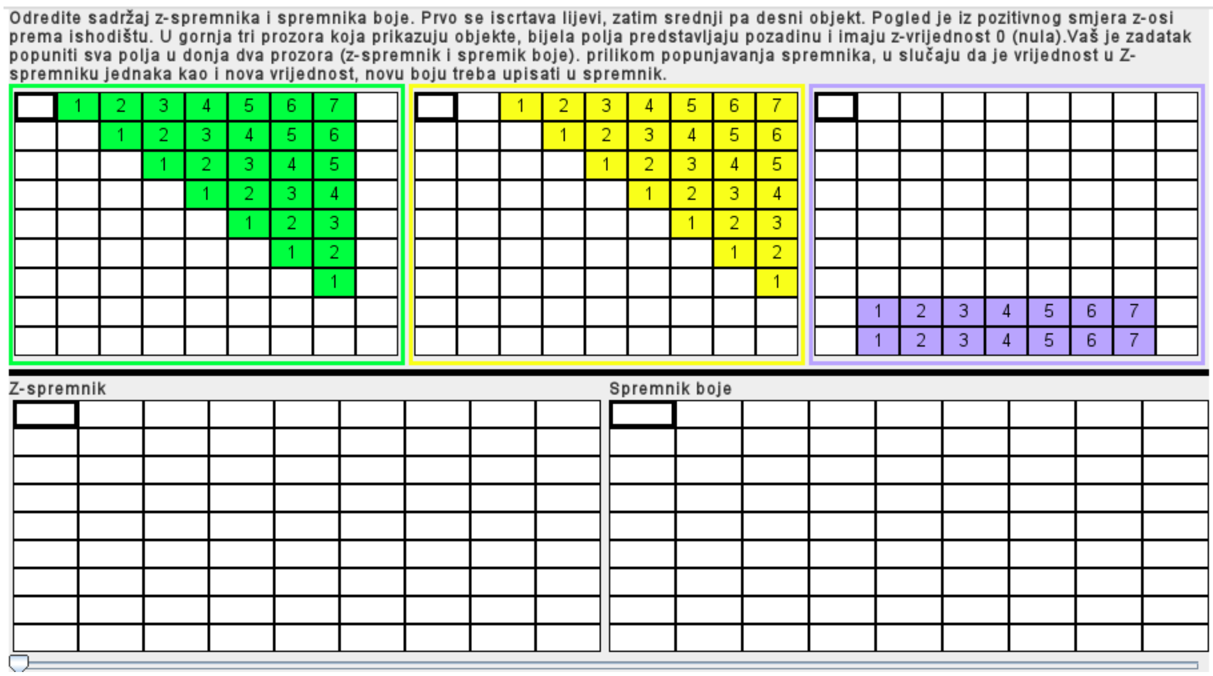
1 Rad s matricama i vektorima na Casio-fx-991EX

Rad s vektorima: https://www.youtube.com/watch?v=-e9rMLADtpE
Ako je potrebno izračunati normu (duljinu) vektora, može se pritisnuti "**SHIFT** + **(**" da se dobije apsolutna vrijednost i unijeti željeni vektor.

Rad s matricama: https://www.youtube.com/watch?v=bF024pVvYPQ

2 Računalna grafička oprema

2.1 Popunjavanje Z-spremnika

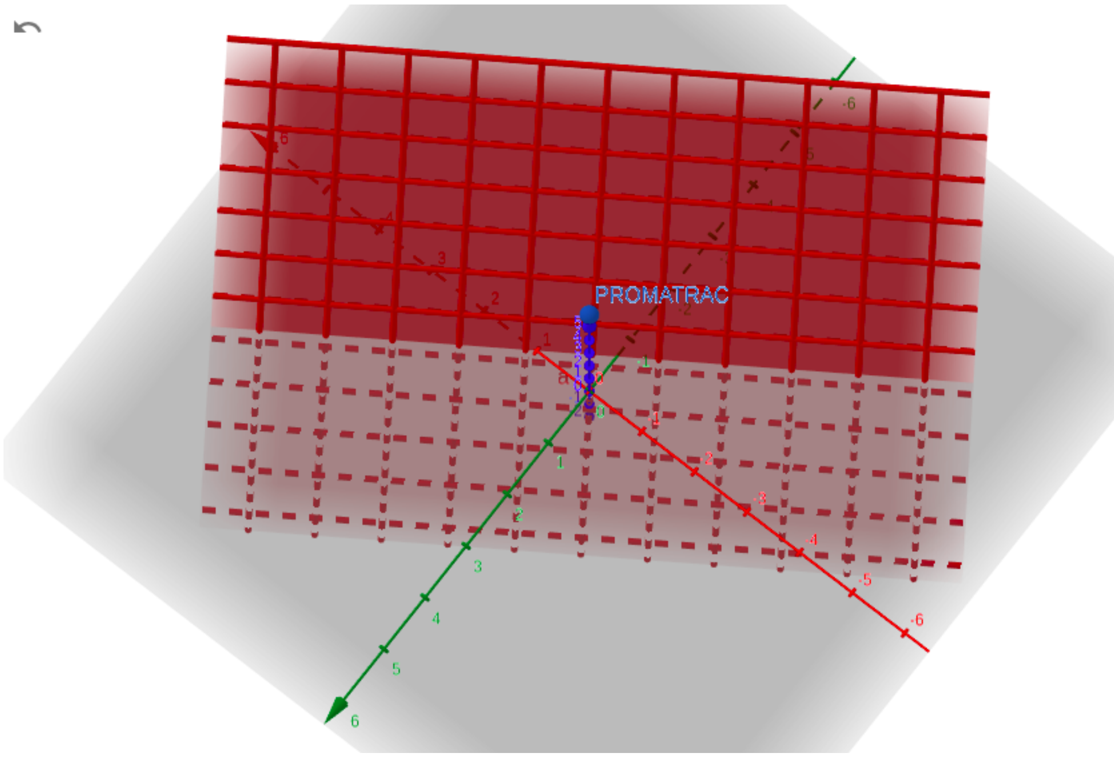


Slika 1: Zadatak

Z-buffer radi na način da gleda koji objekti su bliži promatraču, a koji dalji i na temelju toga iscrtava sliku na zaslon. Odličan dvominutni video će vrlo jednostavno objasniti o čemu se radi:
https://www.youtube.com/watch?v=yhwg_O5HBwQ

Prva stvar koju je potrebno primijetiti u zadatku je ta da je pogled usmjeren iz pozitivnog smjera z-osi prema ishodištu. To je malo drugačije nego je objašnjeno u videu.

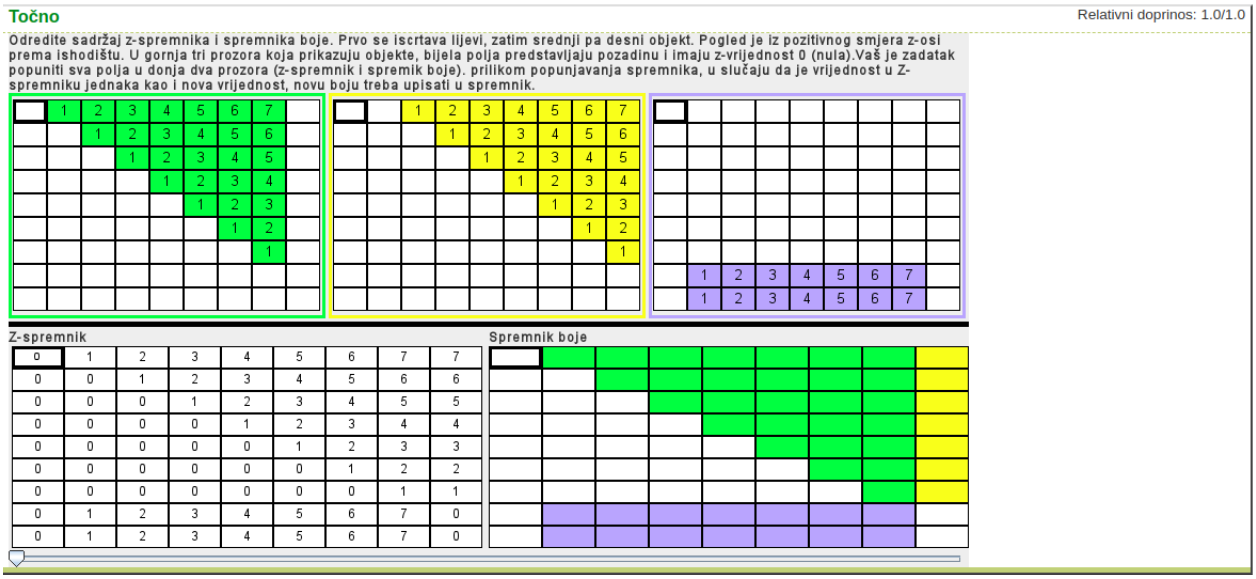
Na Slici 2. je vidljivo da se promatrač nalazi na pozitivnom dijelu Z-osi (u ovom slučaju točka (0, 0, 6)) i gleda prema ishodištu. Iscrtkane linije plohe predstavljaju manju vrijednost z koordinate, a pune linije veću. Iz razloga što se promatrač nalazi u pozitivnom dijelu z-osi, u Z-buffer će se spremati veće vrijednosti z koordinate preko manjih, a ne obrnuto.



Slika 2: Tijela i promatrač u koordinatnom sustavu

Znači, ako se dogodi da nam se dvije boje preklapaju, u z spremnik će se upisati veća vrijednost z koordinate od te dvije.
Što se tiče spremnika boje, ako se dvije boje preklapaju u vrijednostima z-koordinate, ona desnija se upisuje u spremnik boje (piše u zadatku).

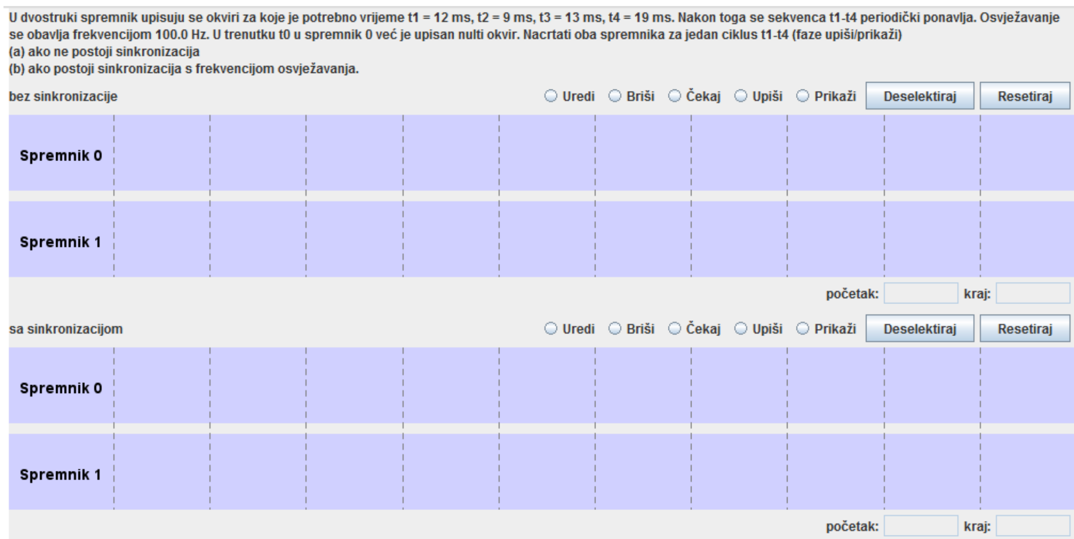
Rješenje zadatka je na Slici 3.



Slika 3: Rješenje zadatka

2.2 Popunjavanje dvostrukog spremnika

Petminutni video koji pojašnjava ukratko rad dvostrukog spremnika: https://www.youtube.com/watch?v=7cRRxlWRl8g



Slika 4: Zadatak

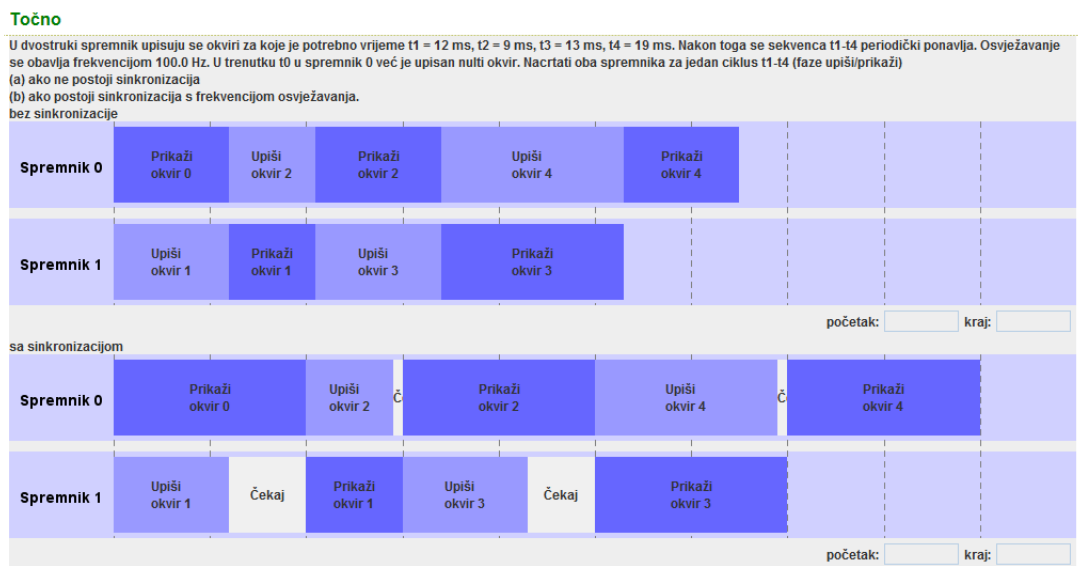
U zadatku je potrebno nacrtati rad oba **spremnika** bez sinkronizacije i sa sinkronizacijom. Rad bez sinkronizacije se izvodi na sljedeći način:
Jedan **spremnik** je zaslužan za prikaz sadržaja (*okvira*), a drugi za upis. Npr. ako je u nultom **spremniku** prikazan nulti *okvir*, u prvom **spremniku** se mora izvršavati upis prvog *okvira*. Onoliko dugo koliko se prvi *okvir* upisuje, toliko je nulti *okvir* prikazan na ekranu.

Nakon toga se događa zamjena **spremnika**, to jest, u nulti **spremnik** se sad upisuje sljedeći (drugi) *okvir*, a u prvom **spremniku** se vrši prikaz prethodnog (prvog) *okvira* onoliko dugo koliko je drugom *okviru* potrebno da se upiše i tako dalje.

Rad sa sinkronizacijom je dosta sličan prethodno opisanom postupku, uz malu razliku. Ta razlika je što svaki *okvir* mora biti prikazan na ekranu brojem milisekundi koji je višekratnik vremena osvježavanja. U zadatku je specificirano da je frekvencija osvježavanja 100 Hz, recipročna vrijednost će dati vrijeme, jer:

$$T = 1/f \tag{1}$$

Iz toga se dobije da je T=0.01 sekundi. Pomnoži se s 1000 i dobije se T=10 ms. To jest svaki se *okvir* mora prikazati 10, 20, 30 ili neki višekratnik broja 10 ms.
To znači da prilikom upisivanja *okvira* u **spremnik** se mora dogoditi čekanje da bi isteklo vrijeme osvježavanja, a to je predstavljeno okvirom **Čekaj**.
Nakon toga se vrši zamjena **spremnika** i proces se nastavlja.



Slika 5: Rješenje

3 Grafičke primitive

3.1 Dvodimenzijske

3.1.1 Sjecište dva pravca - implicitni i matrični oblik

Homogeni prostor se koristi kako bi se točke u beskonačnosti mogle prikazati na računalu. Točnije, ako je homogena koordinata jednaka 0, točka se nalazi u beskonačnosti. Homogena jednadžba se može prikazati kao:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \tag{2}$$

ili matrično (točka X skalarno sa koeficijentima jednadžbe G):

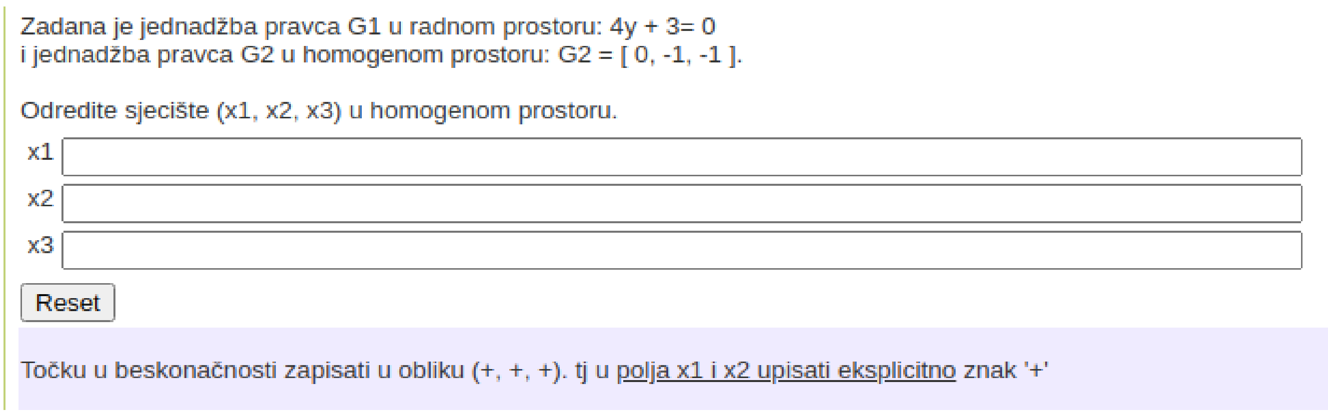
$$X \cdot G = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \tag{3}$$

Implicitni oblik (radni prostor) jednadžbe je oblika:

$$ax + by + c = 0 \tag{4}$$

Odavde se može dobiti i normala koja je oblika

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \tag{5}$$


Zadana je jednadžba pravca G1 u radnom prostoru: 4y + 3= 0
i jednadžba pravca G2 u homogenom prostoru: G2 = [0, -1, -1].

Odredite sjecište (x1, x2, x3) u homogenom prostoru.

x1

x2

x3

Reset

Točku u beskonačnosti zapisati u obliku (+, +, +). tj u polja x1 i x2 upisati eksplicitno znak '+'

Slika 6: Zadatak

Kako bi se riješio zadatak potrebno je riješiti dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. To se može matrično ili klasičnim pristupom.
Prva stvar koju je potrebno napraviti je izjednačiti h koordinatu s 1, a samim time i koeficijente pravca G_2. To jest:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot (-1)$$

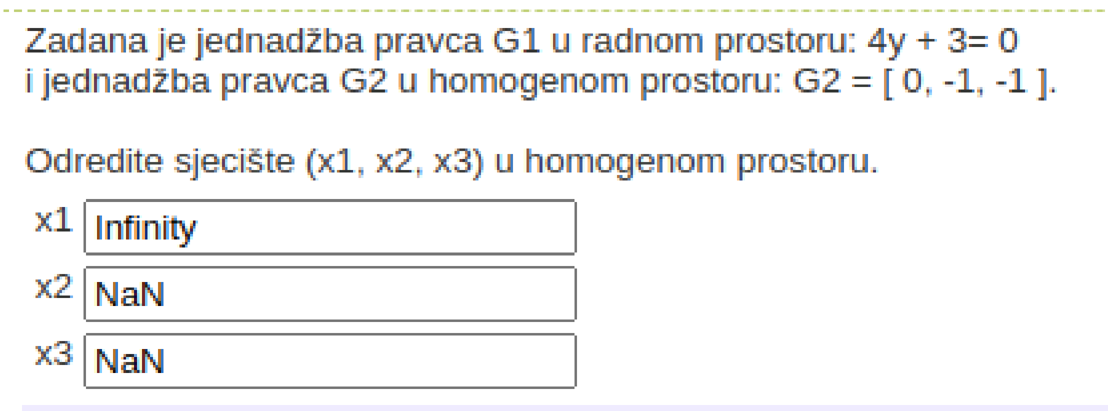
$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$4y + 3 = 0$$

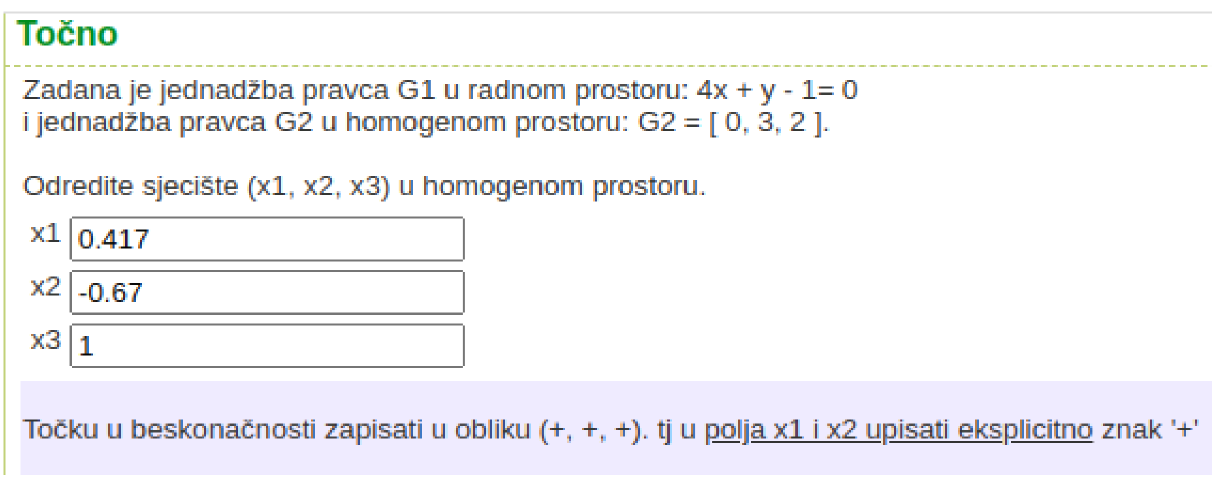
$$y + 1 = 0$$

Druga jednadžba se dobije iz homogene jednadžbe pravca ($x_2 = y$). Ove jednadžbe nemaju rješenja pa se stoga ovako upisuje u ferko:



Slika 7: Zadatak riješen

A sada jedan normalan zadatak i rješenje:



Slika 8: Normalan zadatak riješen

Ako koristite ovakav pristup, x_3 će uvijek biti jednak 1. Još jedno od mogućih rješenja je npr. $x_1 = 0.833, x_2 = -1.333, x_3 = 2$. Iz ovoga se može vidjeti utjecaj h koordinate.

3.1.2 Sjecište dva pravca - parametarski oblik

Kod parametarskog oblika, svaku koordinatu prikazujemo pomoću jednog parametra t. Može se zamisliti kao da svaka koordinata postaje funkcija po

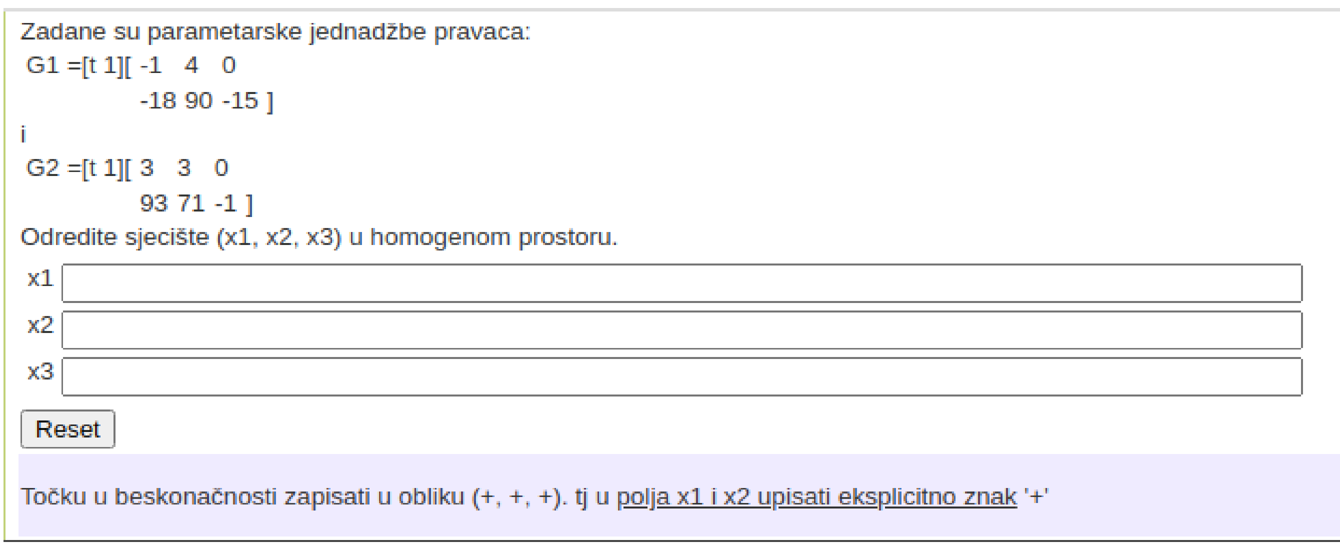
parametru t.
Matrično se to zapisuje ovako:

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 - V_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

ili

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & h \end{bmatrix} \tag{7}$$

gdje V_1 i V_0 predstavljaju dvije točke kroz koje pravac prolazi, a h je homogena koordinata. Zadatak:



Zadane su parametarske jednadžbe pravaca:
G1 =[t 1][-1 4 0
-18 90 -15]
i
G2 =[t 1][3 3 0
93 71 -1]
Odredite sjecište (x1, x2, x3) u homogenom prostoru.
x1
x2
x3
Reset

Točku u beskonačnosti zapisati u obliku (+, +, +). tj u polja x1 i x2 upisati eksplicitno znak '+'

Slika 9: Zadatak

Prva stvar koju je potrebno napraviti u zadatku je izjednačiti sve homogene koordinate s 1. To znači da G_1 sada izgleda ovako:

$$G_1 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ \frac{-18}{-15} & \frac{90}{-15} & 1 \end{bmatrix}$$

G_2 izgleda ovako:

$$G_2 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ \frac{93}{-1} & \frac{71}{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Iz te dvije matrice se dobije kako izgledaju x-evi i y-oni pojedinih pravaca. Parametar prvog pravca je označen s t, a parametar drugog pravca sa s kako ne bi došlo do zabune. Pravac G_1:

$$x_1 = -t + \frac{6}{5}$$

$$y_1 = 4t - 6$$

$$h_1 = 1$$

Pravac G_2:

$$x_2 = 3s - 93$$

$$y_2 = 3s - 71$$

$$h_2 = 1$$

Sljedeći korak je izjednačiti x-eve i y-one:

$$x_1 = x_2 \quad => \quad -t + \frac{6}{5} = 3s - 93$$

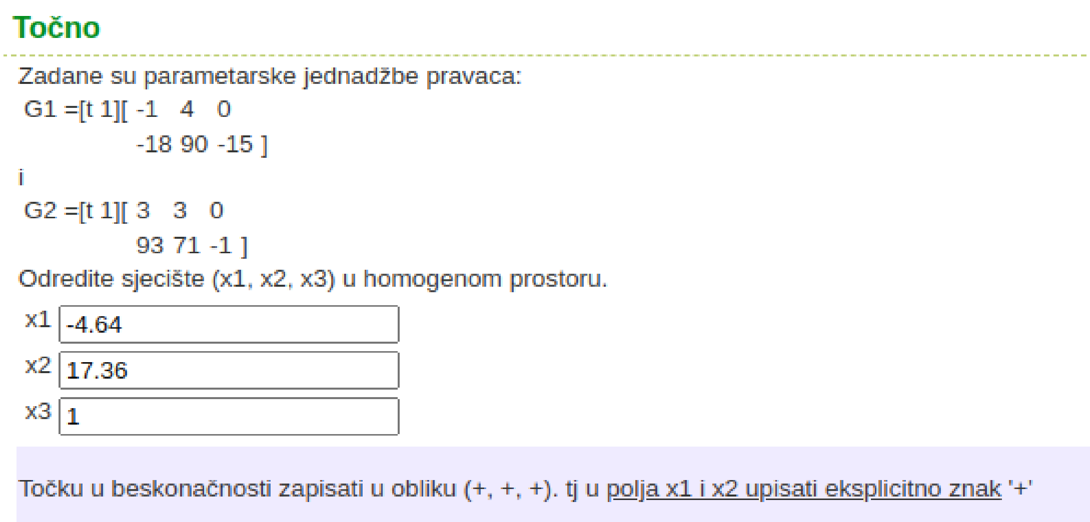
$$y_1 = y_2 \quad => \quad 4t - 6 = 3s - 71$$

Riješe se navedene jednadžbe i dobiju se rješenja $t = 5.84$ i $s = 29.453$. Da bismo dobili točku sjecišta, dovoljno je uvrstiti t u jednadžbu prvog pravca ili s u jednadžbu drugog. Npr. uvrstimo t u jednadžbu prvog i presjecište je:

$$x_1 = x = -4.64$$

$$x_2 = y = 17.36$$

$$x_3 = h = 1$$


Točno

Zadane su parametarske jednadžbe pravaca:
G1 =[t 1][-1 4 0
-18 90 -15]
i
G2 =[t 1][3 3 0
93 71 -1]
Odredite sjecište (x1, x2, x3) u homogenom prostoru.
x1 -4.64
x2 17.36
x3 1

Točku u beskonačnosti zapisati u obliku (+, +, +). tj u polja x1 i x2 upisati eksplicitno znak '+'

Slika 10: Zadatak riješen

3.1.3 (2D) Ispitivanje je li točka u trokutu

Za ispitivanje odnosa točke i trokuta, najlakše je koristiti baricentrične koordinate. U knjizi na stranici 39. i nadalje su izvrsno objašnjene. Formula (3D) koju je dobro zapamtiti je oblika:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Što znači => točka za koju promatramo nalazi li se unutar trokuta = prva baricentrična koordinata puta prvi vrh trokuta + druga baricentrična koordinata puta drugi vrh trokuta + treća baricentrična koordinata puta treći vrh trokuta.

Još jedna bitna stvar je da je zbroj sve tri baricentrične koordinate jednake jedan:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1 \tag{9}$$

Ako su baricentrične koordinate:

$$\forall i, t_i \in < 0, 1 > \quad => \quad Tocka \quad T \quad je \quad unutar \quad trokuta$$

$$\forall i, t_i \in [0, 1] \wedge \exists j, t_j = 1 \quad => \quad Tocka \quad T \quad je \quad na \quad rubu \quad trokuta$$

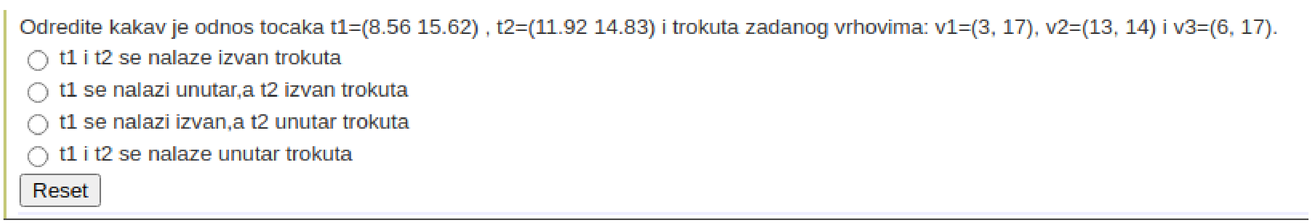
$$\exists i, t_i \notin [0, 1] \quad => \quad Tocka \quad T \quad je \quad izvan \quad trokuta$$

Što ukratko prevedeno znači:

ako su sve baricentrične koordinate između 0 i 1, točka je unutar trokuta;

ako su sve koordinate između 0 i 1 te postoji barem jedna od njih koja je jednaka 1, točka se nalazi na trokutu;

ako postoji jedna baricentrična koordinata koja nije između 0 i 1, točka je izvan trokuta.



Slika 11: Zadatak

Prvo je bitno razlikovati t1 (točka za koju promatramo odnos s trokutom) i t_1 (baricentričnu koordinatu).Krenemo redom, prvo uvrstimo točku t1 i vrhove u jednadžbu 8:

$$\begin{bmatrix} 8.56 \\ 15.62 \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Iz čega dobijemo dvije jednadžbe s tri nepoznanice:

$$8.56 = 3t_1 + 13t_2 + 6t_3$$

$$15.62 = 17t_1 + 14t_2 + 17t_3$$

Treća jednadžba koju ćemo iskoristiti je 9, tj.:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

Kad se riješe jednadžbe, dobiju se rješenja:

$$t_1 = 0.22$$

$$t_2 = 0.46$$

$$t_3 = 0.32$$

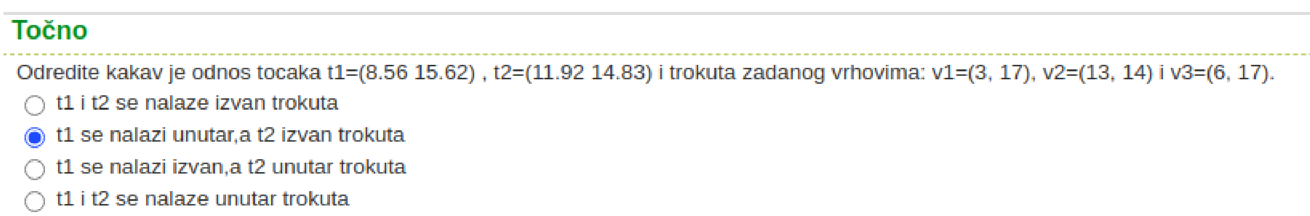
Sve tri točke su između 0 i 1 te zaključuje se da je t1 unutar trokuta. Ista stvar se napravi i za t2 i dobije se:

$$t_1 = -0.2856$$

$$t_2 = 0.72$$

$$t_3 = 0.5622$$

Iz čega vidimo da je t_1 negativan, tj. nije između 0 i 1 te se zaključuje da je točka t2 izvan trokuta.



Točno

Odredite kakav je odnos tocaka t1=(8.56 15.62) , t2=(11.92 14.83) i trokuta zadanog vrhovima: v1=(3, 17), v2=(13, 14) i v3=(6, 17).

- ○ t1 i t2 se nalaze izvan trokuta
- ◉ t1 se nalazi unutar,a t2 izvan trokuta
- ○ t1 se nalazi izvan,a t2 unutar trokuta
- ○ t1 i t2 se nalaze unutar trokuta

Slika 12: Zadatak riješen

3.1.4 Određivanje odnosa točke i poligona (trokuta, četverokuta) - trokut, konveksan i konkavan četverokut

Općenito za sve točke pravca vrijedi jednadžba pravca:

$$ax + by + c = 0 \tag{10}$$

Ili matrično:

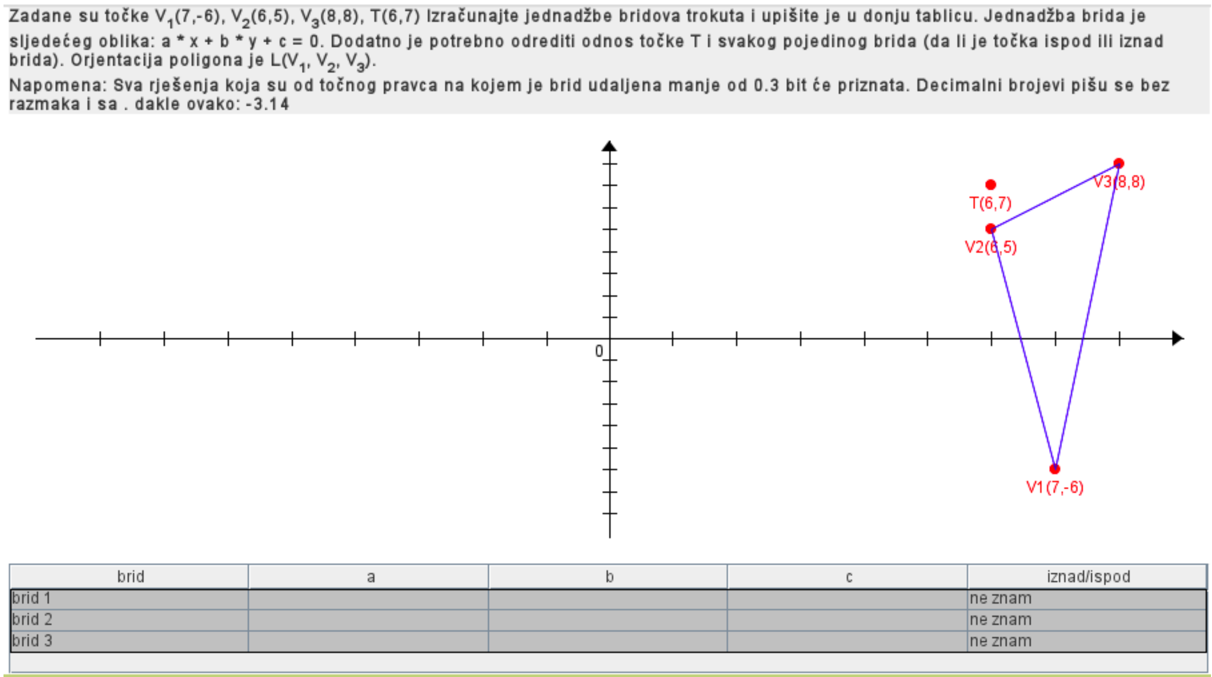
$$\begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \tag{11}$$

Ako bismo uvrstili točku koja se nalazi na pravcu, jednadžba bi valjala. No ako uvrstimo točku koja se ne nalazi na pravcu, vrijede sljedeća opažanja (knjiga stranica 32.):

$$\begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \quad => \quad Tocka \quad je \quad na \quad pravcu$$

$$\begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} > 0 \quad => \quad Tocka \quad je \quad iznad \quad pravca$$

$$\begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} < 0 \quad => \quad Tocka \quad je \quad ispod \quad pravca$$



Slika 13: Zadatak

Može se primijetiti da je u zadatku zadana orijentacija bridova. Ona će nam reći u kojem smjeru gledaju normale bridova trokuta te koja točka je iznad, a koja ispod pojedinog brida. Odlično objašnjenje je u knjizi na stranici 32.

Ukratko: Zamislimo da se krećemo od početne točke do krajnje točke brida, sve lijevo od nas je iznad pravca, a sve desno ispod.

Najjednostavniji izračun jednadžbe pravca je vektorski umnožak. Naime, vektorski umnožak dviju točaka će dati matricu koeficijenata pravca bez greške o orijentaciji pravca:

$$T_1 \times T_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{12}$$

Za brid V_1V_2 vrijedi da množimo vrh V_1 s vrhom V_2 zbog orijentacije vrhova:

$$V_1 \times V_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 71 \end{bmatrix}$$

tj. jednadžba brida V_1V_2 je

$$-11x - y + 71 = 0$$

Uvrstimo li točku T u jednadžbu brida V_1V_2 dobije se:

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 71 \end{bmatrix} = -2$$

tj. $T \cdot (V_1 \times V_2) < 0$ odnosno, točka T je ispod brida V_1V_2. To se može vidjeti i na slici 13 jer je točka T desno od pravca na kojem je brid V_1V_2.

Ostali bridovi:

$$V_2 \times V_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot (V_2 \times V_3) = 4 \quad tj. \quad iznad \quad pravca$$

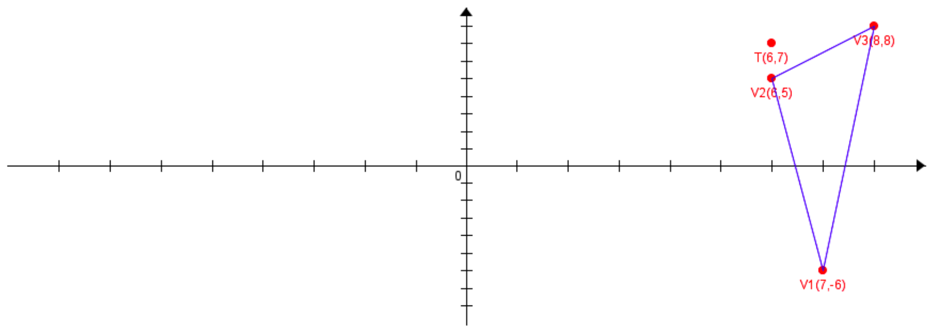
$$V_3 \times V_1 = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ -104 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot (V_3 \times V_1) = -27 \quad tj. \quad ispod \quad pravca$$

Isti postupci vrijede i za zadatke s konveksnim i konkavnim četverokutom.

Točno

Zadane su točke $V_1(7,-6)$, $V_2(6,5)$, $V_3(8,8)$, $T(6,7)$ Izračunajte jednadžbe bridova trokuta i upišite je u donju tablicu. Jednadžba brida je sljedećeg oblika: a * x + b * y + c = 0. Dodatno je potrebno odrediti odnos točke T i svakog pojedinog brida (da li je točka ispod ili iznad brida). Orjentacija poligona je $L(V_1, V_2, V_3)$.
Napomena: Sva rješenja koja su od točnog pravca na kojem je brid udaljena manje od 0.3 bit će priznata. Decimalni brojevi pišu se bez razmaka i sa . dakle ovako: -3.14

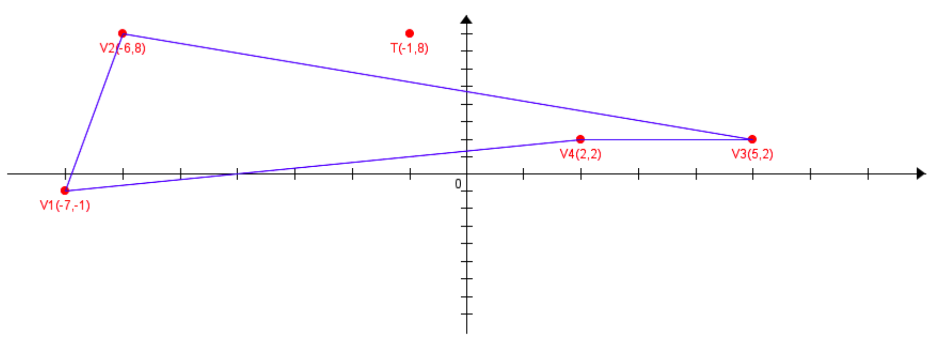


brid	a	b	c	iznad/ispod
brid 1	-11.0	-1.0	71.0	ispod
brid 2	-3.0	2.0	8.0	iznad
brid 3	14.0	-1.0	-104.0	ispod

Slika 14: Zadatak riješen trokut

Točno

Zadane su točke $V_1(-7,-1)$, $V_2(-6,8)$, $V_3(5,2)$, $V_4(2,2)$, $T(-1,8)$ Izračunajte jednadžbe bridova četverokuta i upišite je u donju tablicu. Jednadžba brida je sljedećeg oblika: a * x + b * y + c = 0. Dodatno je potrebno odrediti odnos točke T i svakog pojedinog brida (da li je točka ispod ili iznad brida). Orjentacija poligona je $L(V_1, V_2, V_3, V_4)$.
Napomena: Sva rješenja koja su od točnog pravca na kojem je brid udaljena manje od 0.3 bit će priznata. Decimalni brojevi pišu se bez razmaka i sa . dakle ovako: -3.14



brid	a	b	c	iznad/ispod
brid 1	-9.0	1.0	-62.0	ispod
brid 2	6.0	11.0	-52.0	iznad
brid 3	0.0	-3.0	6.0	ispod
brid 4	3.0	-9.0	12.0	ispod

Slika 15: Zadatak riješen konkavan četverokut

3.1.5 Afina transformacija koja preslikava jednu dužinu u drugu

Sve o afinim transformacijama se može pronaći u knjizi na stranici 89. Ovdje će biti navedene formule za svaku od dvodimenzionalnih afinih transformacija.
Translacija:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Inverzna translacija:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x & -\Delta y & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Rotacija - za kut suprotan smjeru kazaljke na satu (CCW - *Counter Clockwise*):

$$R = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Inverz rotacije - za kut u smjeru kazaljke na satu (CW) ili (CCW za -α):

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Skaliranje - povećanje:

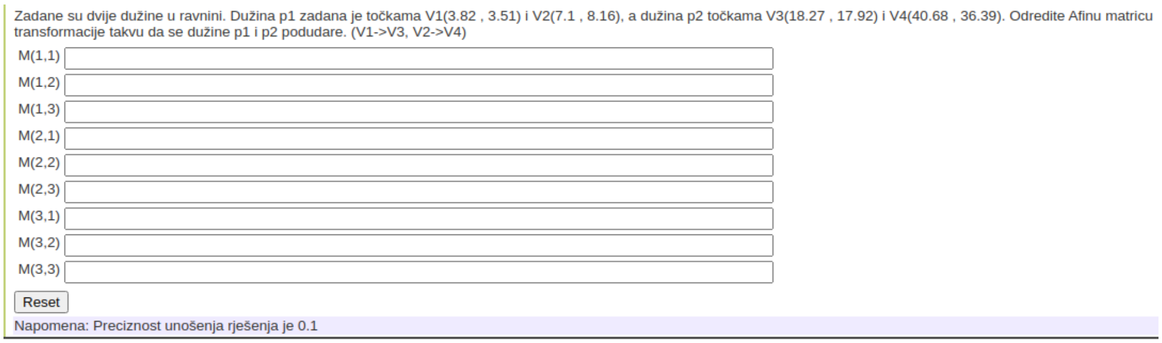
$$S = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Inverzno skaliranje - umanjenje:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Uniformno skaliranje - jednoliko povećanje:

$$S = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \tag{19}$$



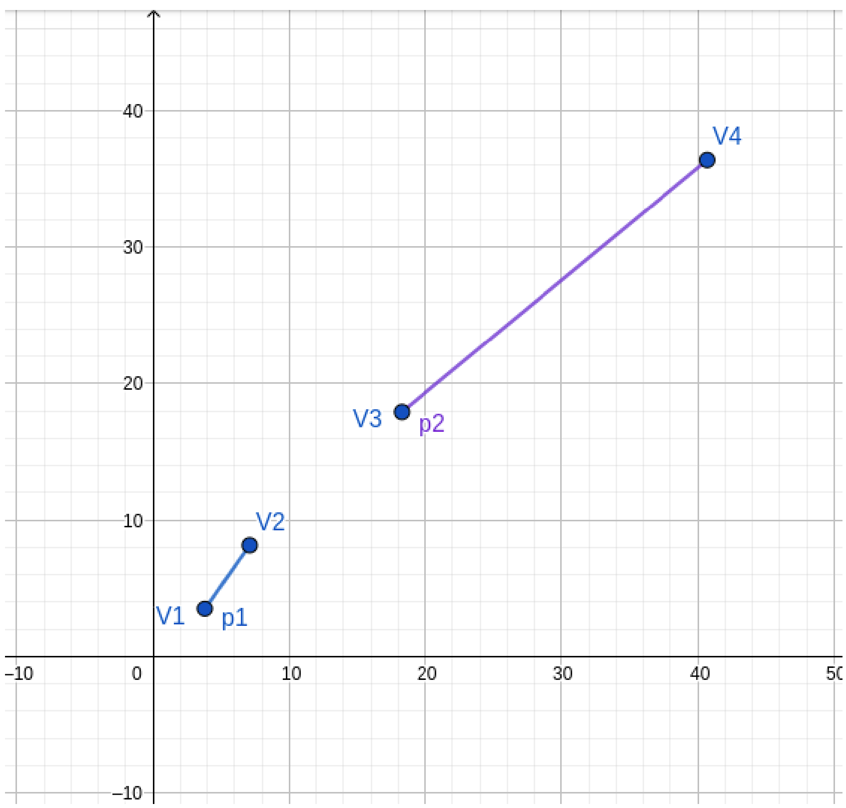
Zadane su dvije dužine u ravnini. Dužina p1 zadana je točkama V1(3.82 , 3.51) i V2(7.1 , 8.16), a dužina p2 točkama V3(18.27 , 17.92) i V4(40.68 , 36.39). Odredite Afinu matricu transformacije takvu da se dužine p1 i p2 podudare. (V1->V3, V2->V4)

M(1,1)
M(1,2)
M(1,3)
M(2,1)
M(2,2)
M(2,3)
M(3,1)
M(3,2)
M(3,3)

Reset

Napomena: Preciznost unošenja rješenja je 0.1

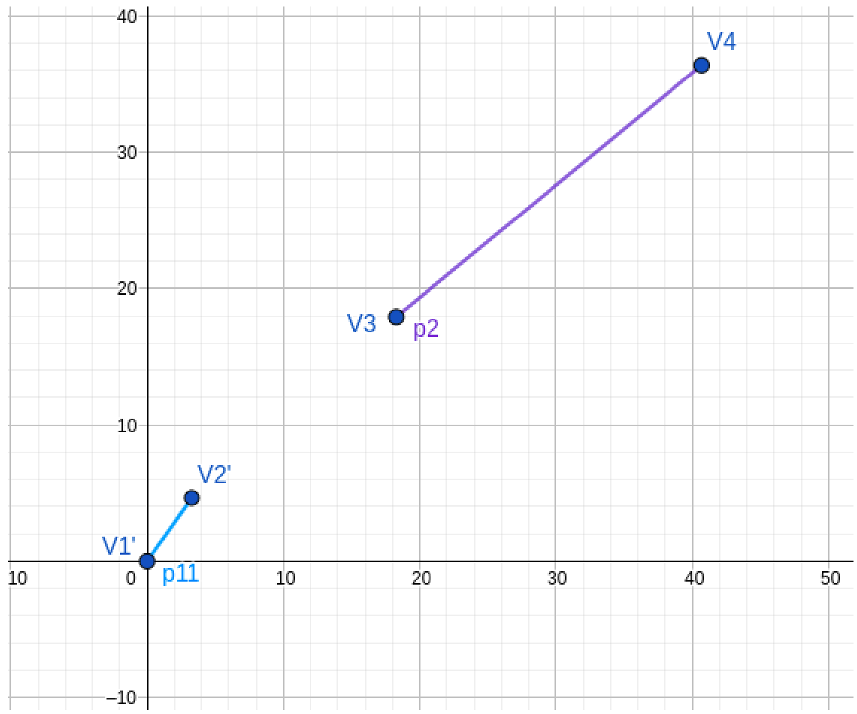
Slika 16: Zadatak



Slika 17: Dvije dužine u koordinatnom sustavu

Prva stvar koju je potrebno primijetiti u zadatku je ta da je potrebno preslikati dužinu $\overline{V_1V_2}$ u dužinu $\overline{V_3V_4}$. Najprije ćemo dužinu $\overline{V_1V_2}$ translatirati u ishodište. To se čini iz razloga što se prilikom rotacije točka rotira oko ishodišta. Korištenjem inverzne translacije ćemo jednu od točaka (V_1) translatirati u ishodište. Ta matrica izgleda ovako:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3.82 & -3.51 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 18: Dužina $\overline{V_1V_2}$ translatirana u ishodište

Sljedeći korak je napraviti potrebne rotacije kako bi se dužine poklopile. Prvo će se dužina $\overline{V_1V_2}$ rotirati za kut α kako bi se poklopila sa x-osi. Nakon toga će se skalirati te potom rotirati za kut β kako bi se kutevi dviju dužina poklopili. Kut α je kut između x-osi i dužine $\overline{V_1V_2}$, a kut β je kut između x-osi i dužine $\overline{V_3V_4}$.

Prvo se dužina $\overline{V_1V_2}$ rotira za kut α u smjeru kazaljke na satu (ili kut $-\alpha$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu). Kut α se dobije pomoću koeficijenta smjera pravca na kojem leži dužina $\overline{V_1V_2}$:

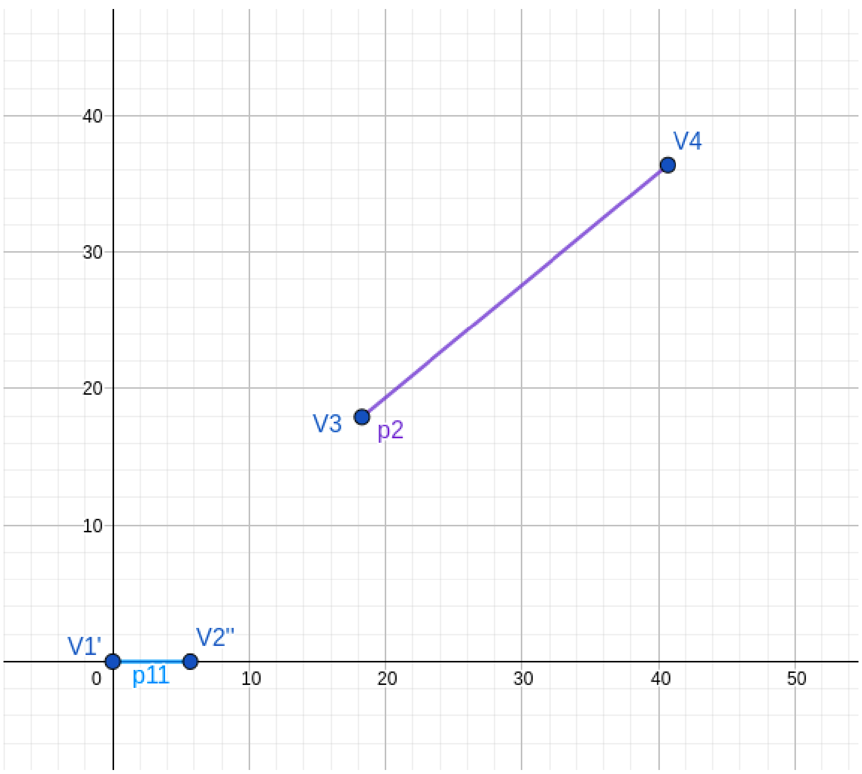
$$tg(\alpha) = k_1 \tag{20}$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{21}$$

$$\alpha = arctg(k_1) \tag{22}$$

Konkretno, pomoću prethodno navedenih formula, $k_1 = 1.4177$, tj. $\alpha = 54.802°$ odnosno, matrica R_1 (16):

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.5764 & -0.8171 & 0 \\ 0.8171 & 0.5764 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 19: Dužina $\overline{V_1V_2}$ rotirana za kut 54.802° CW

Sada je na redu skaliranje. Kako cijela dužina leži na x-osi, skaliranje je dovoljno provesti po x-u. Matricu skaliranja možemo dobiti iz omjera duljina dužina. Duljina dužine se izračuna prema formuli:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{23}$$

Za dužinu $\overline{V_1V_2}$ se dobije:

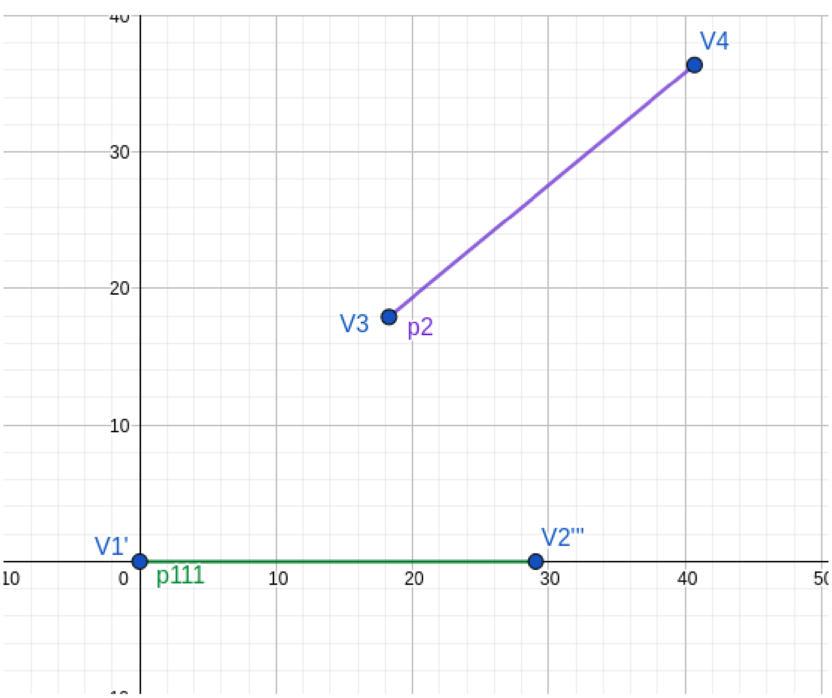
$$d_1 = \sqrt{(7.1 - 3.82)^2 + (8.16 - 3.51)^2} = 5.69$$

Odnosno dužinu $\overline{V_3V_4}$:

$$d_2 = 29.04$$

To znači da dužinu $\overline{V_1V_2}$ treba povećati za $\frac{d_2}{d_1}$:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{29.04}{5.69} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 20: Dužina $\overline{V_1V_2}$ skalirana za $\frac{d_2}{d_1}$

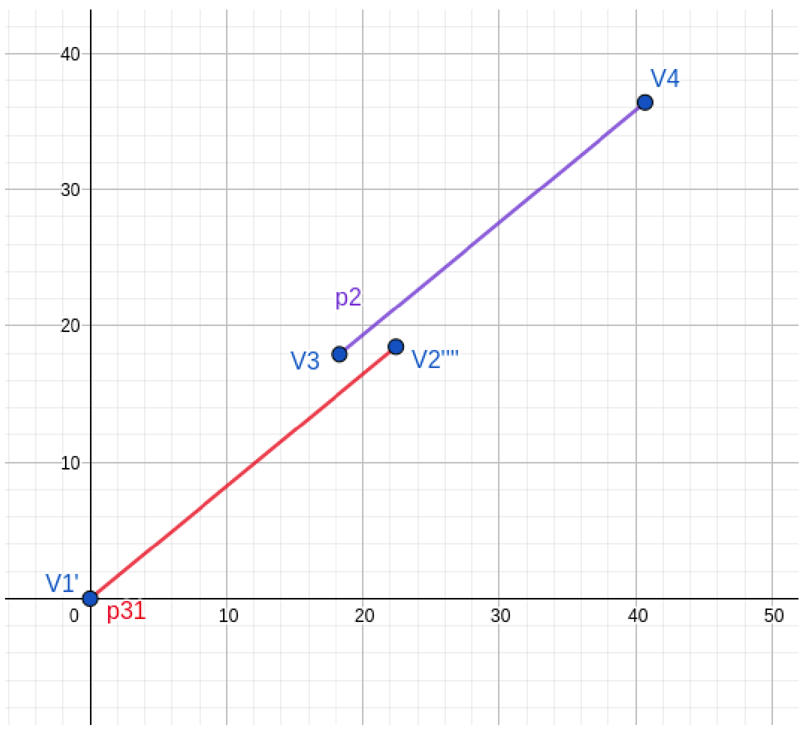
Sada je na redu rotiranje za kut β kako bi se dužine poklopile u kutevima. Kut β se dobije na isti način kao i α.

$$k_2 = \frac{36.39 - 17.92}{40.68 - 18.27} = 0.824$$

$$\beta = arctg(k_2) = 39.49°$$

Rotiramo za kut β CCW:

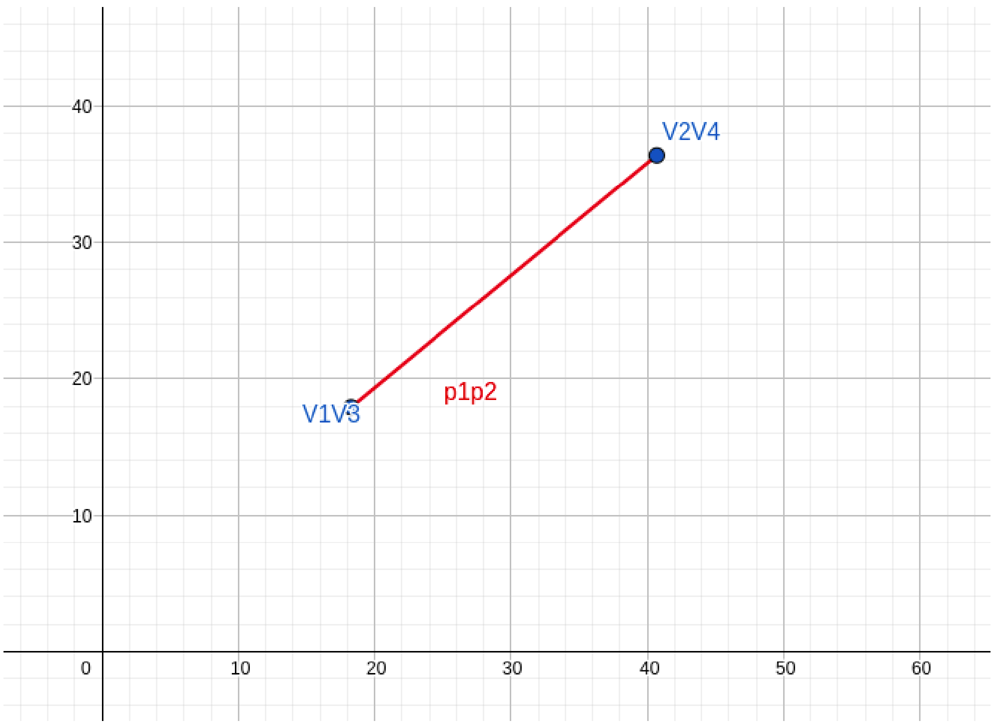
$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.7717 & 0.636 & 0 \\ -0.636 & 0.7717 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 21: Dužina $\overline{V_1V_2}$ rotirana za kut 39.49° CCW

Posljednje je potrebno translatirati dužinu $\overline{V_1V_2}$, a to se radi da cijelu dužinu pomaknemo za točku V_3:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18.27 & 17.92 & 1 \end{bmatrix}$$

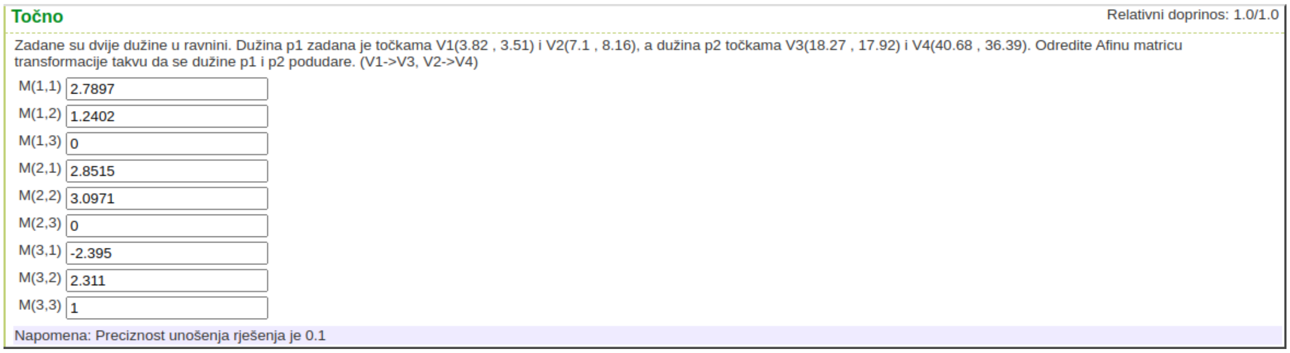


Slika 22: Preklopljene dužine

Konačna afina matrica transformacije se dobije kao umnožak svih matrica:

$$U = T_1 \cdot R_1 \cdot S \cdot R_2 \cdot T_2$$

$$U = \begin{bmatrix} 2.7897 & 1.2402 & 0 \\ 2.8515 & 3.0971 & 0 \\ -2.395 & 2.311 & 1 \end{bmatrix}$$


Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadane su dvije dužine u ravnini. Dužina p1 zadana je točkama V1(3.82 , 3.51) i V2(7.1 , 8.16), a dužina p2 točkama V3(18.27 , 17.92) i V4(40.68 , 36.39). Odredite Afinu matricu transformacije takvu da se dužine p1 i p2 podudare. (V1->V3, V2->V4)

M(1,1)	2.7897
M(1,2)	1.2402
M(1,3)	0
M(2,1)	2.8515
M(2,2)	3.0971
M(2,3)	0
M(3,1)	-2.395
M(3,2)	2.311
M(3,3)	1

Napomena: Preciznost unošenja rješenja je 0.1

Slika 23: Rješenje zadatka

3.1.6 Odrediti potrebne transformacije za kućicu

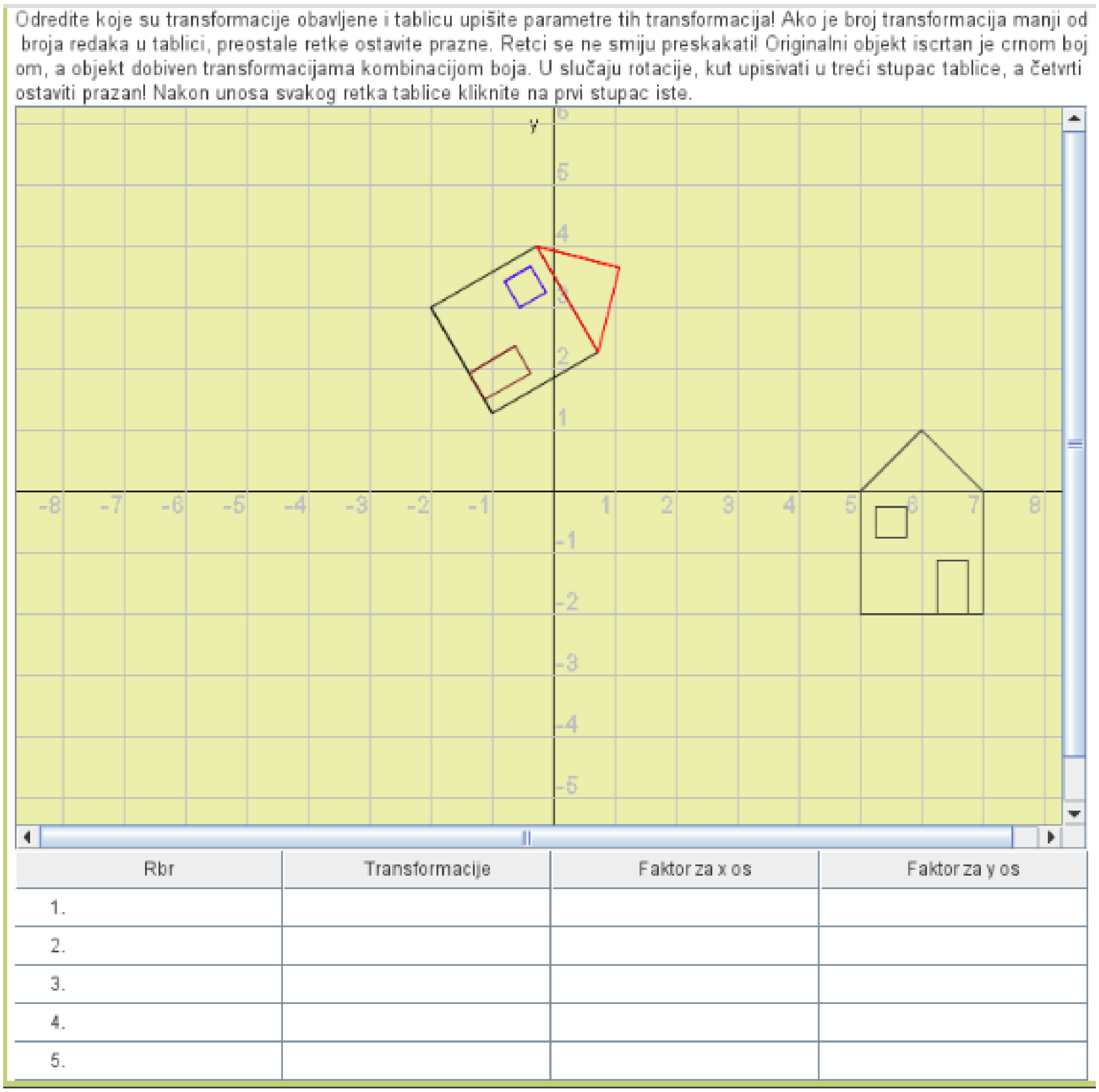
Sličan zadatak je moguće pronaći na sljedećem linku https://www.youtube.com/watch?v=-XEPMgTsZmY&list=PLwCivZFSo4llyk6bsi_m4hQN62P1mueoe&index=3&t=4035s na 58 minuti.

Ovo je malo lakša inačica prethodnog zadatka, stoga ako ste rješavali prethodni zadatak, princip je sličan. Sve transformacije su vidljive sa slike. U ovom zadatku se može pojaviti smik. Iako formula za smik nije potrebna za ovaj zadatak, ona glasi:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & tg(\alpha) & 0 \\ tg(\beta) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Inverz matrice smika:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)} & \frac{-tg(\alpha)}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)} & 0 \\ \frac{-tg(\beta)}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)} & \frac{1}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$



Slika 24: Zadatak - rotacija

Najprije je potrebno odabrati točku koja će predstavljati crni objekt. Za odabir točke ćemo uzeti onu točku čije je koordinate najlakše iščitati sa šarenog objekta. U ovom slučaju, točku na šarenom objektu $B(-2, 3)$ je najlakše iščitati. Ekvivalent toj točki na crnom objektu je točka $A(5, -2)$.

To se može zaključiti iz položaja vrata kućice.

Sljedeće promatramo koje transformacije je potrebno učiniti. Sa slike je vidljivo da će biti potrebne dvije translacije i jedna rotacija. Zadaci koji sadrže ostale transformacije će biti prikazani na kraju ovog podpoglavlja.

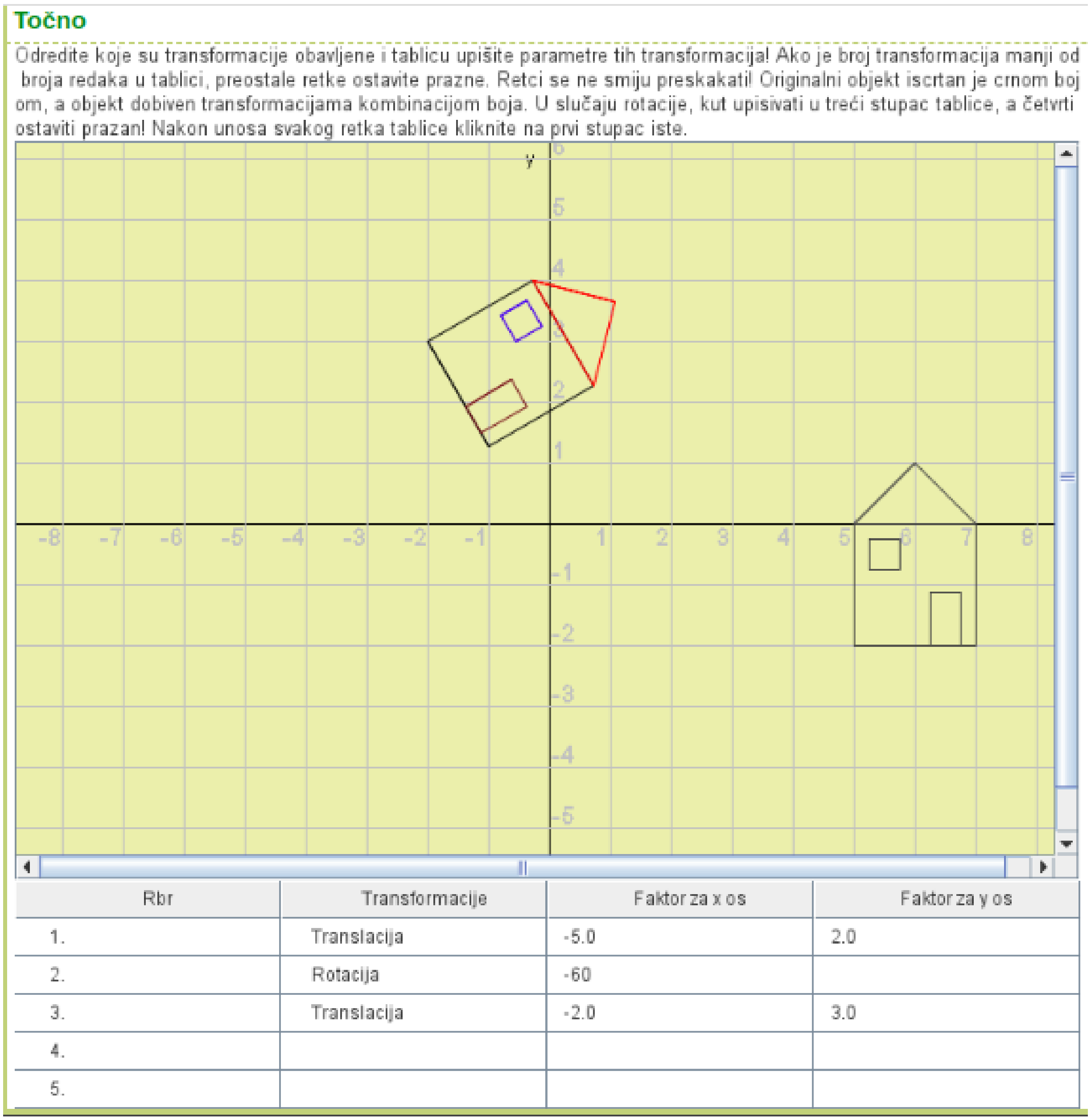
Sada prvo translatiramo crni objekt u ishodište kako bi rotacija funkcionirala. Stoga u prvi redak odaberemo **Translacija**, faktor za x-os je **-5**, a faktor za y-os je **2**.

Nakon toga biramo **Rotacija** te u faktor za x-os upisujemo **-60** jer rotiramo u smjeru kazaljke na satu. Faktor za y-os ostavljamo prazno, jer je tako definirano u zadatku. Ako niste sigurni koji je kut, uvijek ga je moguće izračunati "otprilike" pomoću izraza 20, 21 i 22. Potrebno je samo iščitati sa slike dvije točke koje čine bazu kućice i izračunati pod kojim kutem baza leži.

Posljednja stvar je **Translacija** u završni, šareni objekt. Translatiramo za **-2** u smjeru x i **3** u smjeru y.

Ako je zadan smik u zadatku, onda se gleda za koji kut je baza kućice pomaknuta u odnosu na x-os, odnosno, za koji kut je zid kućice pomaknut u odnosu na y-os.

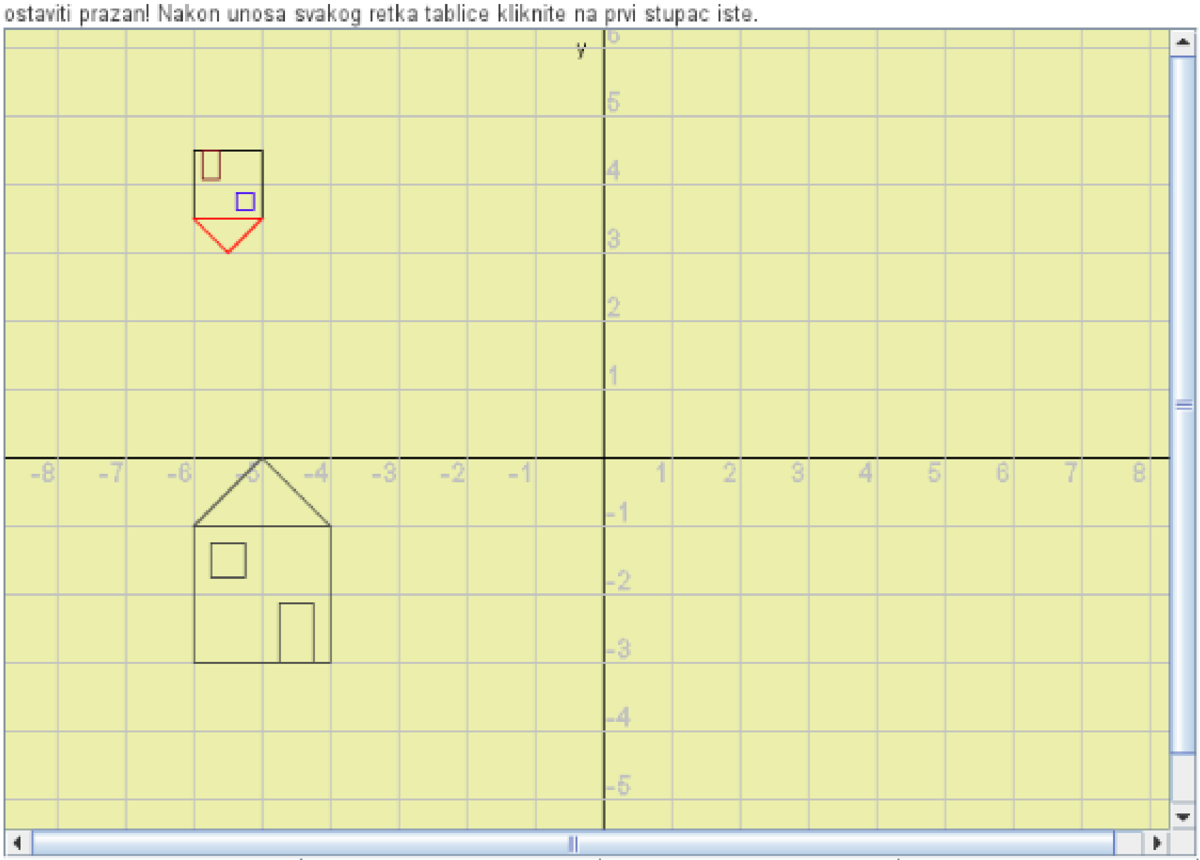
Ako je skaliran objekt, onda je potrebno još provjeriti zrcali li se s obzirom na koju od osi. Ako da, onda je predznak skaliranja negativan s obzirom na os koja objekt zrcali.



Slika 25: Zadatak - rotacija riješen

Točno

Odredite koje su transformacije obavljene i tablicu upišite parametre tih transformacija! Ako je broj transformacija manji od broja redaka u tablici, preostale retke ostavite prazne. Retci se ne smiju preskakati! Originalni objekt iscrtan je crnom bojom, a objekt dobiven transformacijama kombinacijom boja. U slučaju rotacije, kut upisivati u treći stupac tablice, a četvrti ostaviti prazan! Nakon unosa svakog retka tablice kliknite na prvi stupac iste.

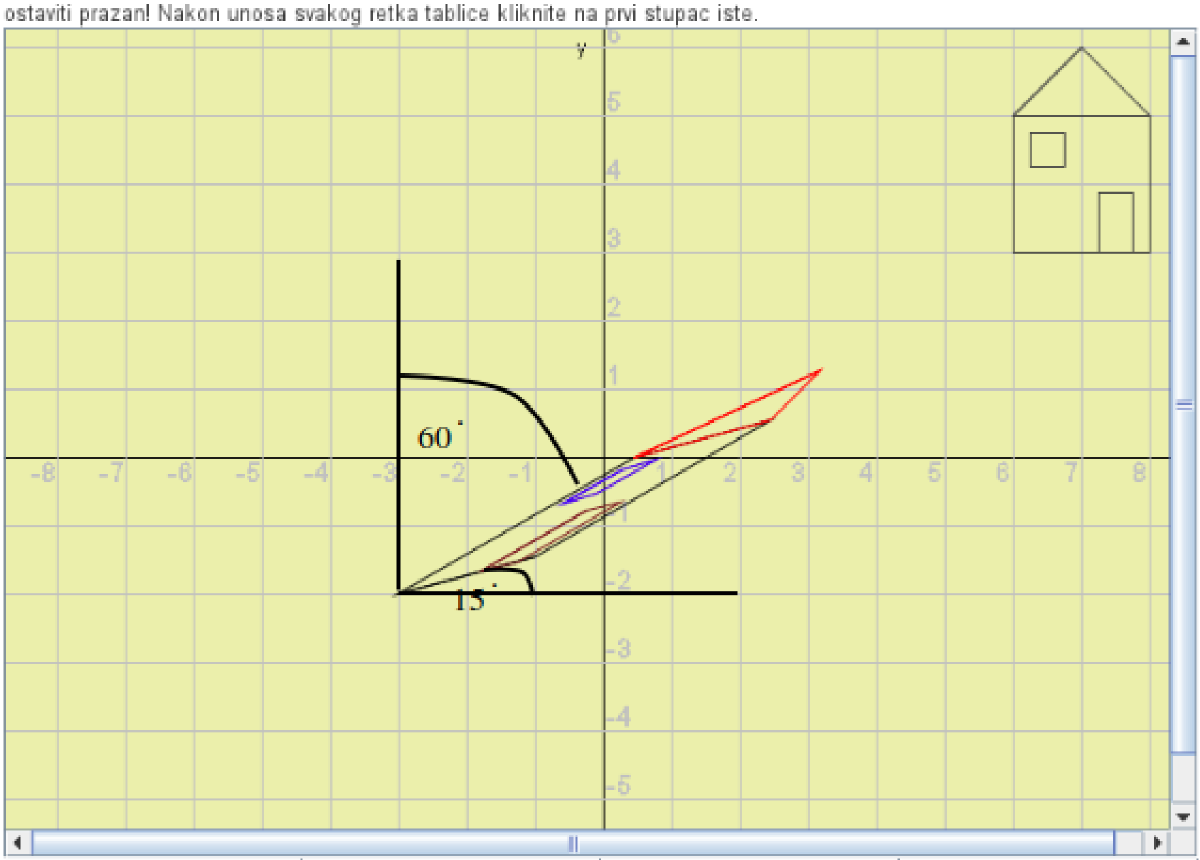


Rbr	Transformacije	Faktor za x os	Faktor za y os
1.	Translacija	6.0	3.0
2.	Skaliranje	-0.5	-0.5
3.	Translacija	-5.0	4.5
4.			
5.			

Slika 26: Zadatak - skaliranje riješen

Točno

Odredite koje su transformacije obavljene i tablicu upišite parametre tih transformacija! Ako je broj transformacija manji od broja redaka u tablici, preostale retke ostavite prazne. Retci se ne smiju preskakati! Originalni objekt iscrtan je crnom bojom, a objekt dobiven transformacijama kombinacijom boja. U slučaju rotacije, kut upisivati u treći stupac tablice, a četvrti ostaviti prazan! Nakon unosa svakog retka tablice kliknite na prvi stupac iste.



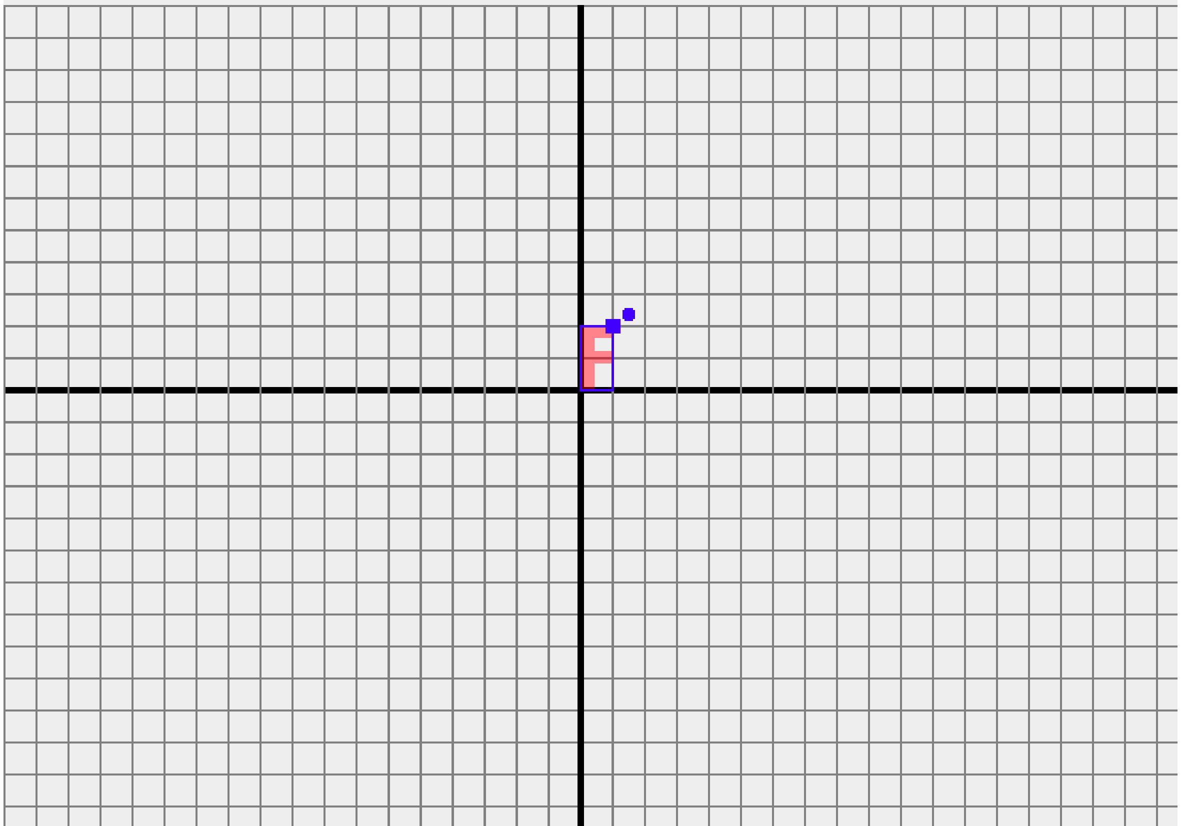
Rbr	Transformacije	Faktor za x os	Faktor za y os
1.	Translacija	-6.0	-3.0
2.	Smik	15	60
3.	Translacija	-3.0	-2.0
4.			
5.			

Slika 27: Zadatak - smik riješen

3.1.7 Odrediti transformiranu poziciju za slovo F

Zadane su Affine transformacije M1, M2 i M3. Provedite transformacije nad prikazanim tjelom redosljedom kojim su zadane.

$$M1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M2 = \begin{bmatrix} \cos(90°) & \sin(90°) & 0 \\ -\sin(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$



Reset na početnu poziciju

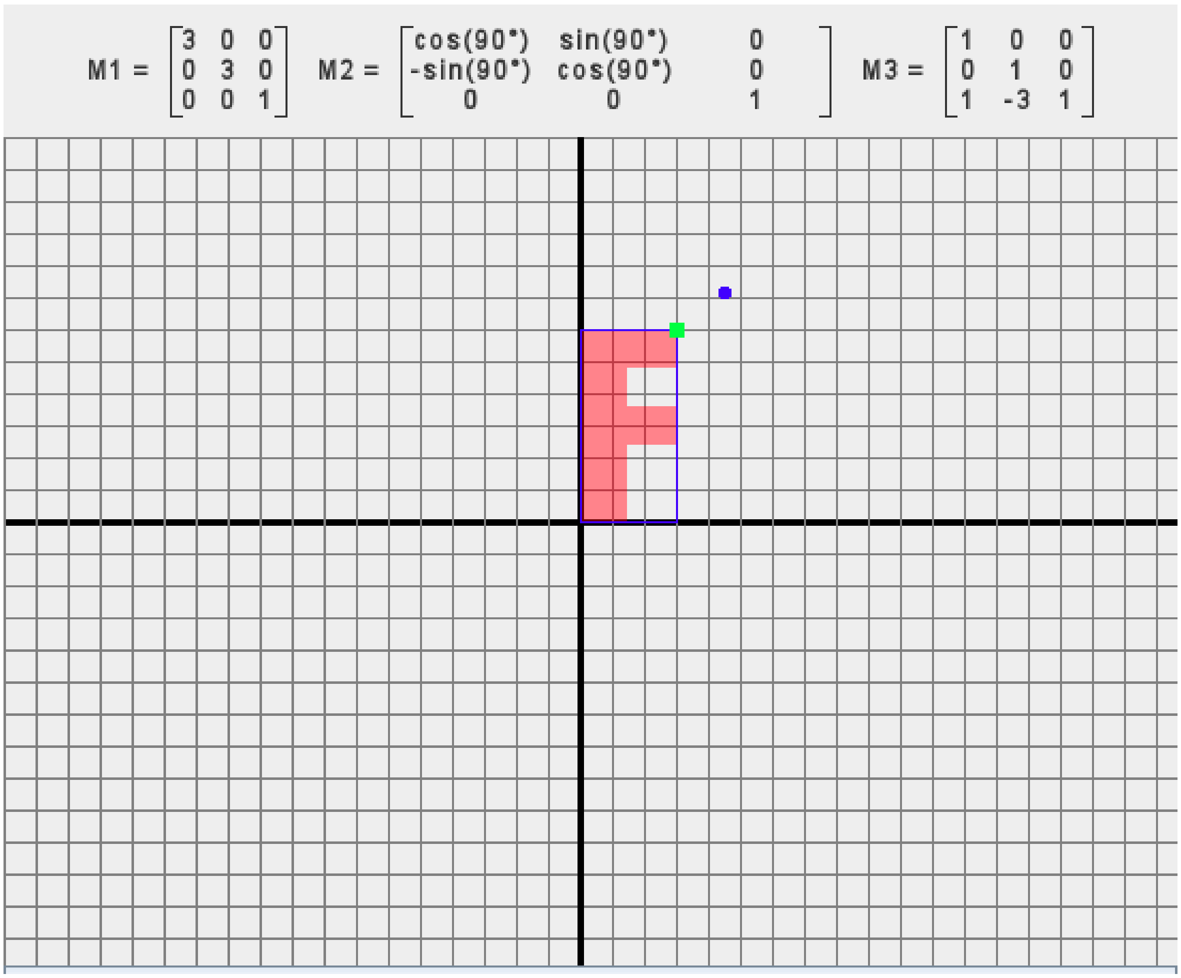
Uputstva:

* objekt se pomiće pristikom tipke miše i držanjem tipke tako dugo dok niste zadovoljni s njegovom pozicijom
* objekt se mjenja veličina pomicanjem plavog kvadratića
* pomicanjem plavog kvadratića preko ruba objekta dobije se zrcaljeni objekt
* objekt se rotira pomicanjem plavog kružića
* rotacija objekta se obavlja u koracima od 45°

Slika 28: Zadatak

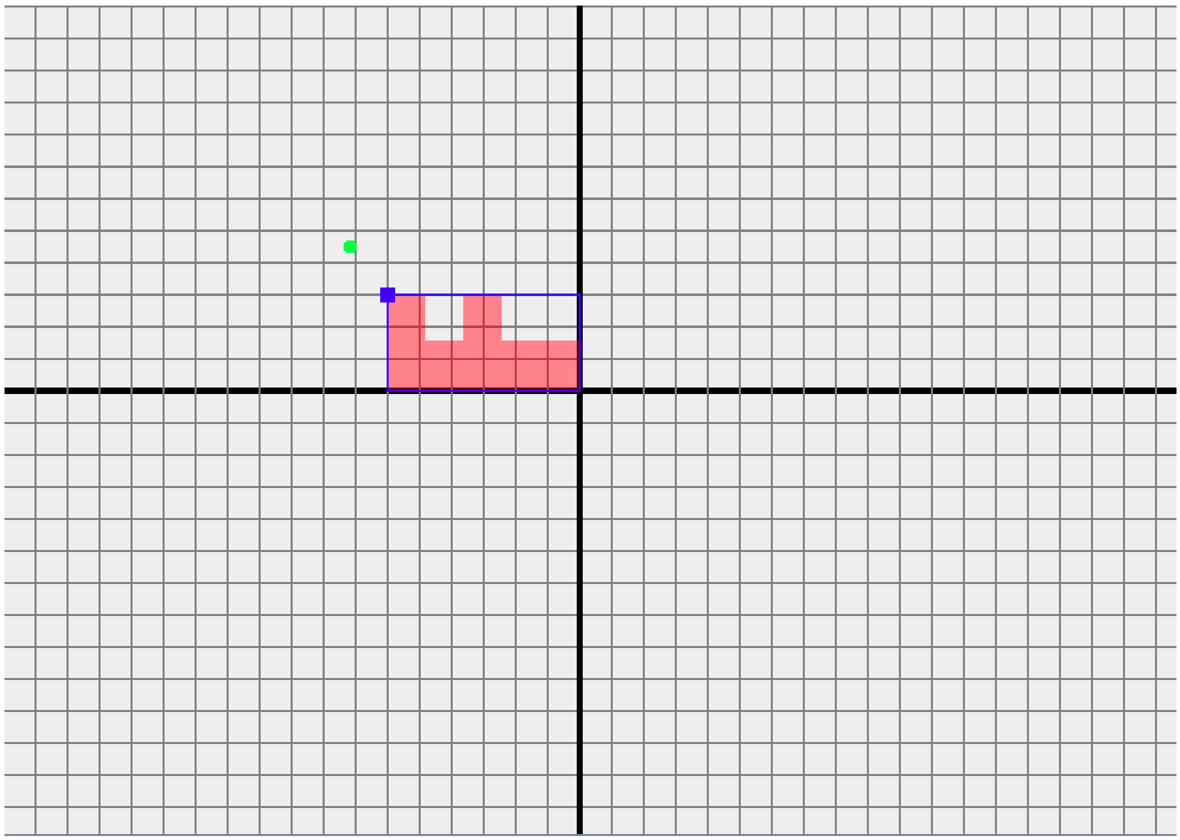
U ovom zadatku je potrebno identificirati koje matrice se koriste. Formule za matrice možete pronaći u poglavlju 3.1.5.

Prvo radimo po matrici M_1, a ona predstavlja skaliranje za 3 po x-u i y-u.



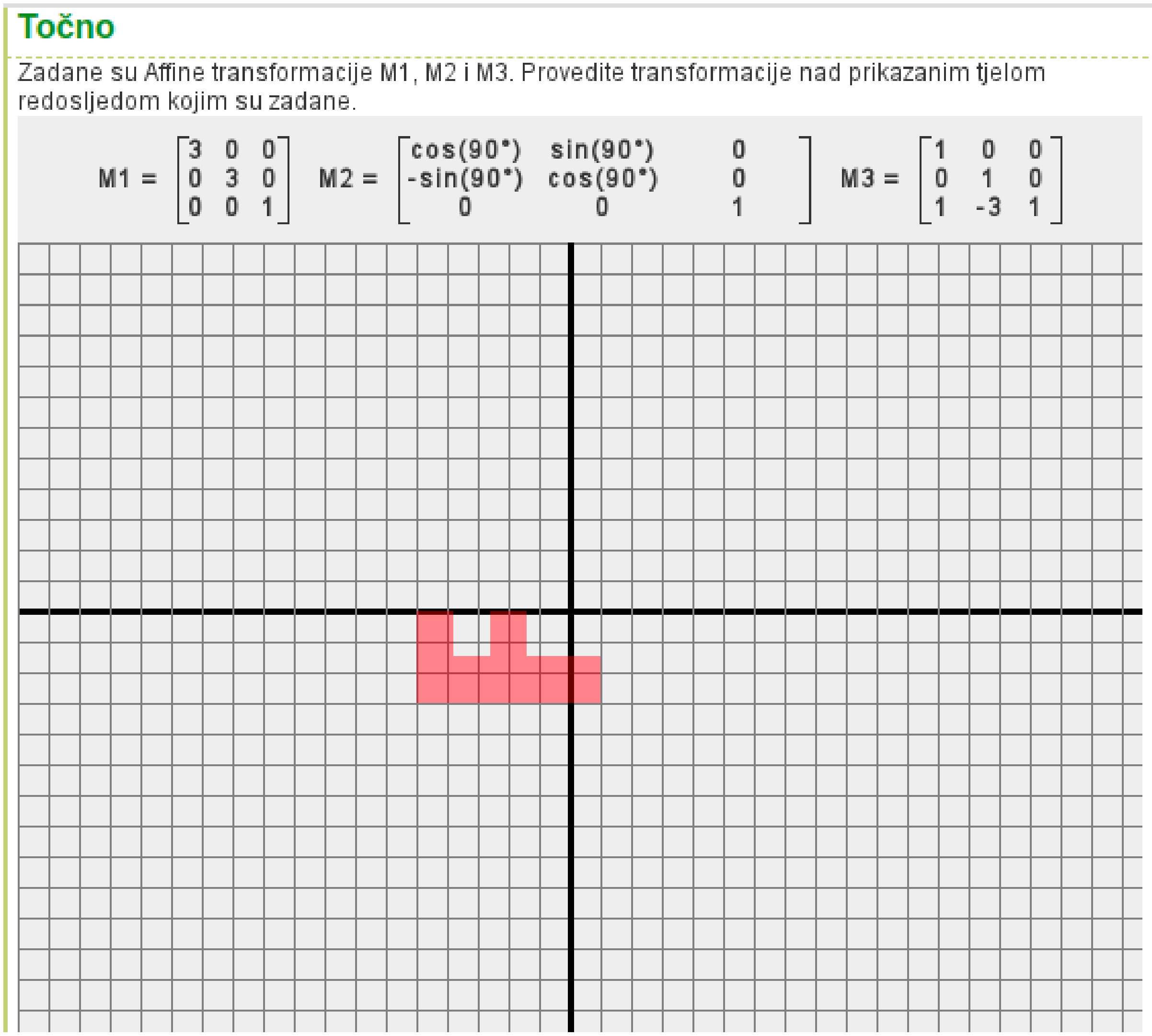
Slika 29: Skaliranje po M_1

Nakon toga rotiramo za 90° u smjeru suprotnom od kazaljke na satu jer tako piše u matrici M_2.



Slika 30: Rotacija po M_2

Te na kraju pomičemo za 1 udesno po x-u i za 3 prema dolje po y-onu.



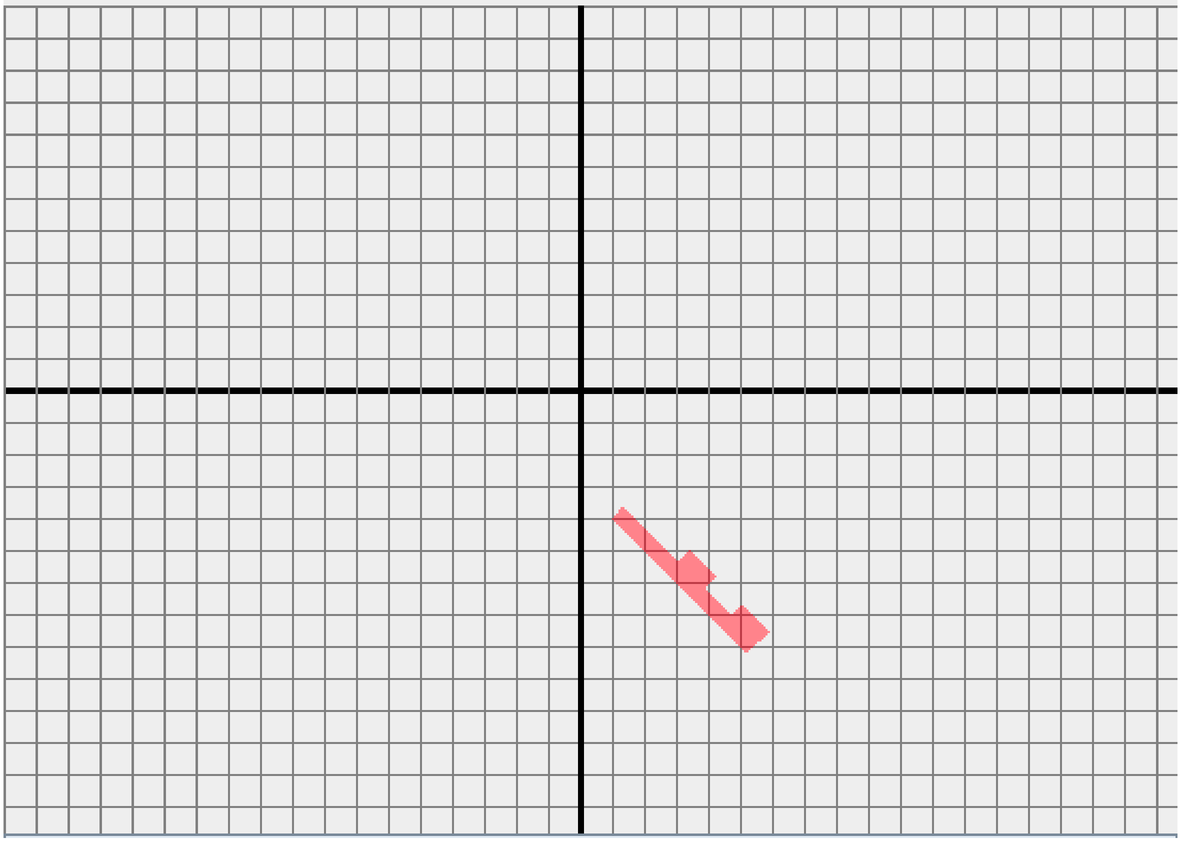
Slika 31: Zadatak riješen

Još jedan sličan:

Točno

Zadane su Affine transformacije M1, M2 i M3. Provedite transformacije nad prikazanim tjelom redosljedom kojim su zadane.

$$M1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M2 = \begin{bmatrix} \cos(45°) & \sin(45°) & 0 \\ -\sin(45°) & \cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 32: Zadatak riješen 2

3.1.8 Veza dva koordinatna sustava - Transformacija iz globalnog u lokalni koordinatni sustav

Pazite da su vam kutevi namješteni na radijane u kalkulatoru.

Veza između dva koordinatna sustava je lijepo objašnjena u knjizi na stranici 106. Ukratko je dobro za zapamtiti da ako je točka zadana u lokalnom koordinatnom sustavu, a nama treba u globalnom, radimo uobičajene transformacije, to jest, one koje nisu inverzne. U slučaju da je točka zadana u globalnom koordinatnom sustavu, a nas zanimaju koordinate u lokalnom, radimo inverzne transformacije.

Ili još jedan način kako lakše zapamtiti, ako je točka zadana u lokalnom koordinatnom sustavu, cilj nam je globalni koordinatni sustav podudariti sa lokalnim. U drugom slučaju, da nam je točka zadana u globalnom koordinatnom sustavu, cilj nam je lokalni koordinatni sustav podudariti sa globalnim. Odnosno, sustav u kojem je točka je statičan, ovaj drugi se prilagođava.

Što se tiče složenijih transformacija, shema je ista. U slučaju da je točka u lokalnom koordinatnom sustavu, radimo normalnim redoslijedom transformacije (translacija, rotacija, ...). U drugom slučaju radimo inverze, a samim time i inverze složenijih matrica. Točnije, iz lokalnog u globalni bi složena matrica mogla izgledati:

$$M = V \cdot R \cdot T$$

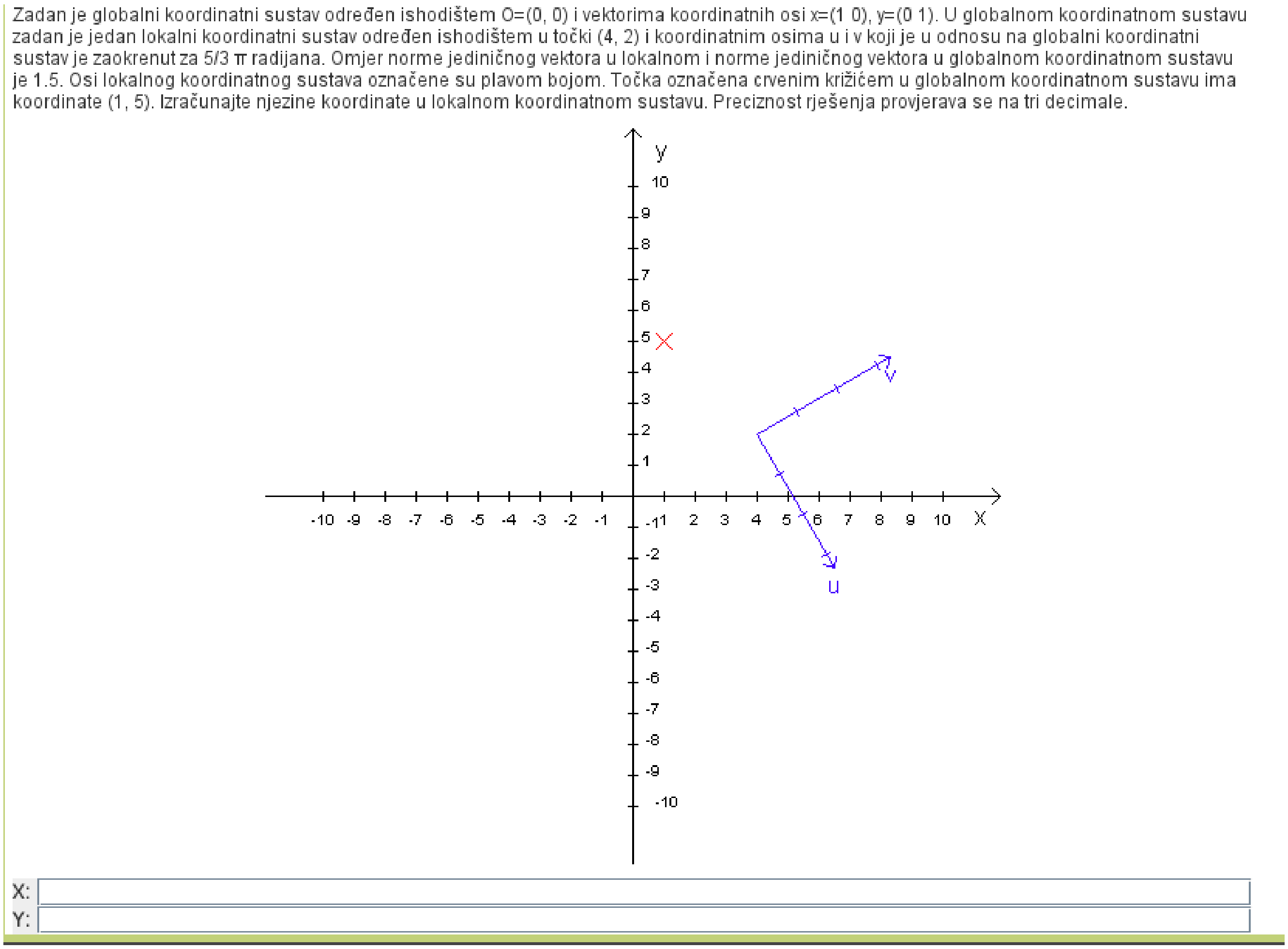
, a iz globalnog u lokalni:

$$M = V \cdot (R \cdot T)^{-1} = V \cdot T^{-1} \cdot R^{-1}$$

gdje M predstavlja ukupnu matricu, V predstavlja točku koja se promatra, T je matrica translacije, a R je matrica rotacije. Sve formule koje se koriste u zadatku su navedene u poglavlju 3.1.5.

Ako promatramo na način da jedan sustav podudaramo s drugim, vidjet će se da ima smisla. Naime, u slučaju iz lokalnog u globalni, globalni sustav prvo rotiramo (jer za rotaciju je bitno da se rotira oko ishodišta, tako su izvedene formule u knjizi), a nakon toga translatiramo. U drugom slučaju, kad lokalni treba podudariti sa globalnim, prvo translatiramo u ishodište kako bismo mogli rotirati da bi se podudarili.

Skaliranje i smik se izvode dok je ijedan od sustava u ishodištu. Znači u slučaju lokalni-globalni -> skaliranje, rotacija pa translacija (ili rotacija, skaliranje, translacija). U slučaju globalni-lokalni -> translacija, rotacija pa skaliranje (ili translacija, skaliranje, rotacija).



Slika 33: Zadatak

U zadatku je potrebno odrediti koordinate točke u lokalnom koordinatnom sustavu, ako su njene koordinate zadane u globalnom. Koordinata x se podudara sa koordinatom u lokalnog sustava, a y s v.

Znači, globalni sustav je statičan, a lokalni mijenjamo. Prvo će se napraviti translacija ishodišta lokalnog koordinatnog sustava u ishodište globalnog koordinatnog sustava:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nakon toga ga je potrebno zarotirati za $\frac{5\pi}{3}$ radijana u smjeru kazaljke na satu (ili $\frac{\pi}{3}$ CCW):

$$R = \begin{bmatrix} cos(\frac{5\pi}{3}) & -sin(\frac{5\pi}{3}) & 0 \\ sin(\frac{5\pi}{3}) & cos(\frac{5\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

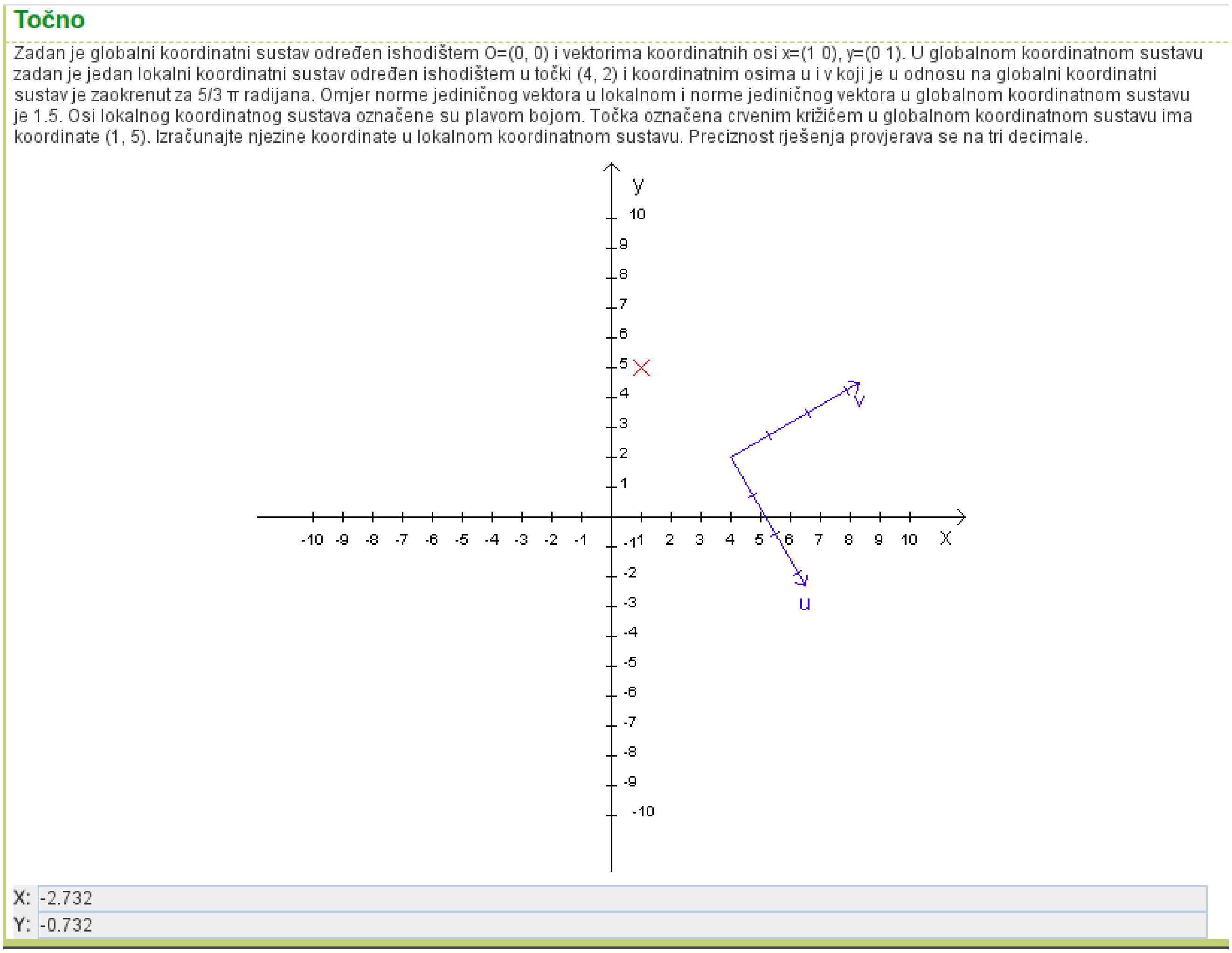
Te na kraju još skalirati:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{1.5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1.5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Točka $V(1,5)$ globalnog koordinatnog sustava u lokalnom iznosi:

$$V_l = V{\cdot}T{\cdot}R{\cdot}S = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1.5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1.5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

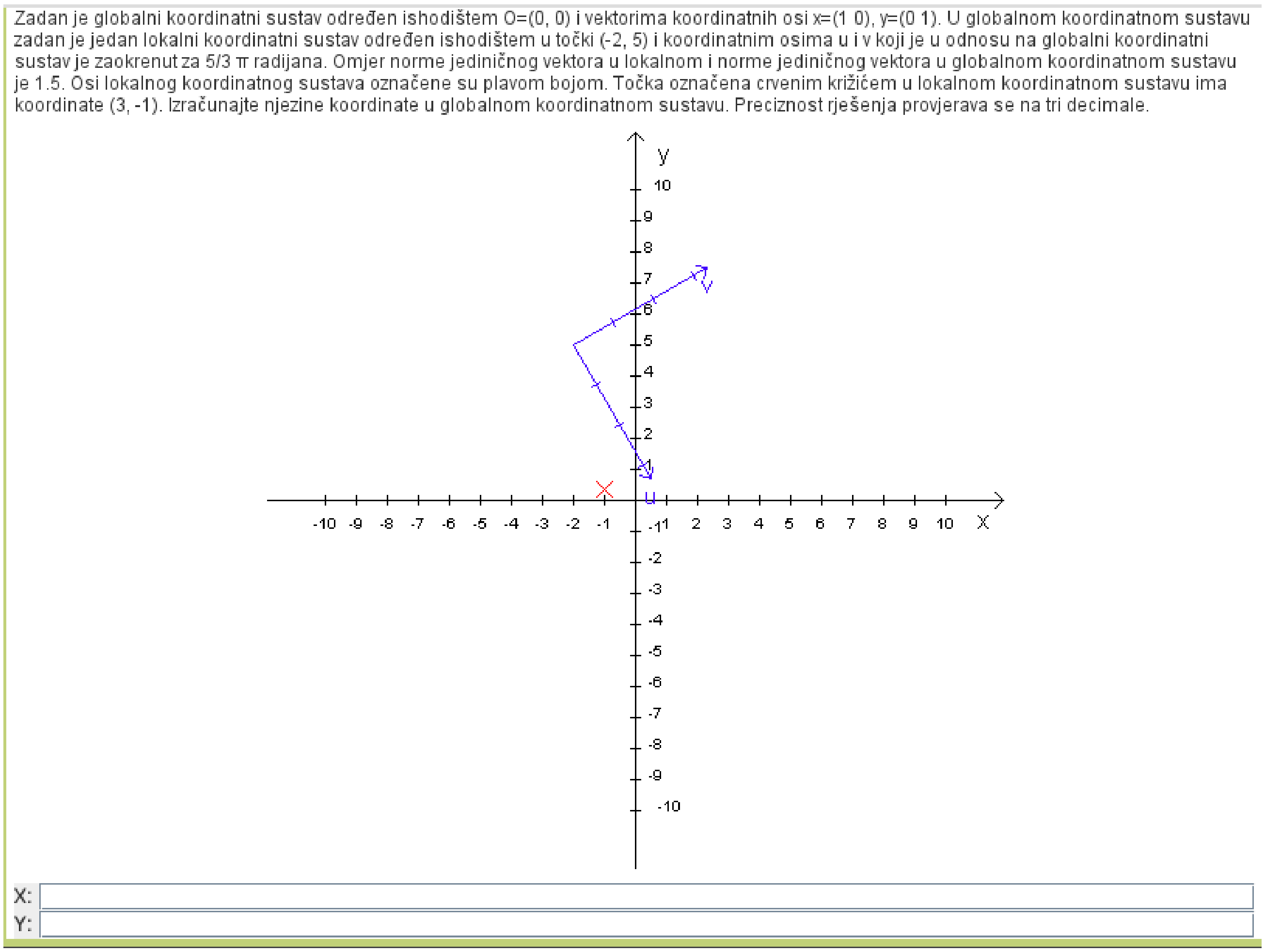
$$= \begin{bmatrix} -2.732 & -0.732 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 34: Zadatak riješen

3.1.9 Veza dva koordinatna sustava - Transformacija iz lokalnog u globalni koordinatni sustav

Za detaljnija objašnjenja, pogledajte poglavlje 3.1.8.



Slika 35: Zadatak

Pošto je točka zadana u lokalnom koordinatnom sustavu, on je statičan. Tj. globalni ćemo prilagoditi lokalnom. Prva stvar koju je potrebno napraviti je rotacija ili skaliranje. Neka bude skaliranje - globalnom koordinatnom sustavu treba povećati normu 1.5 puta:

$$S = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nakon toga je na redu rotacija za $\frac{5\pi}{3}$ radijana u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu:

$$R = \begin{bmatrix} cos(\frac{5\pi}{3}) & sin(\frac{5\pi}{3}) & 0 \\ -sin(\frac{5\pi}{3}) & cos(\frac{5\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

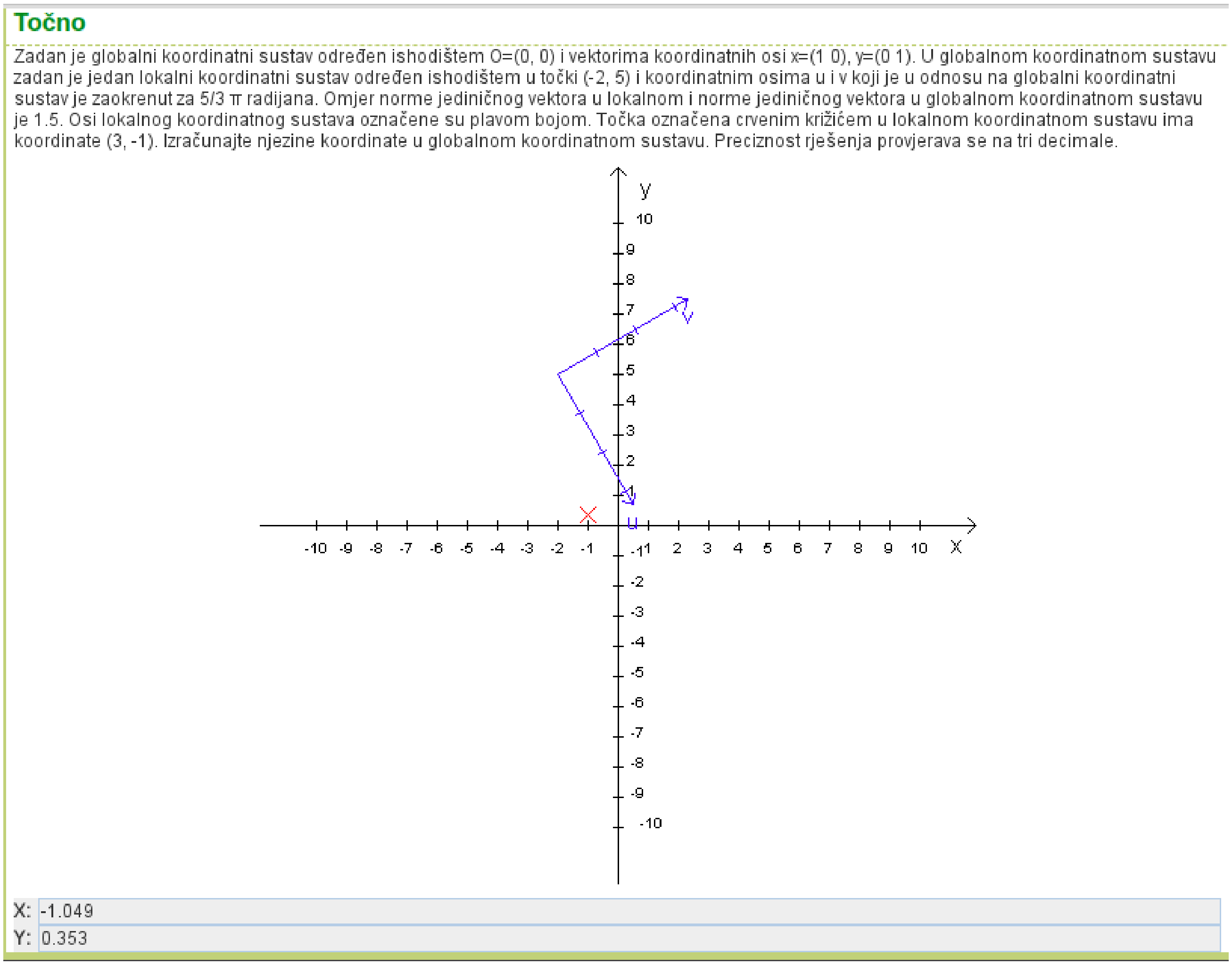
Te na kraju je translacija ishodišta globalnog koordinatnog sustava u ishodište lokalnog koordinatnog sustava:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Konačno, točka u globalnom koordinatnom sustavu iznosi:

$$V_g = V \cdot S \cdot R \cdot T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.049 & 0.353 & 1 \end{bmatrix}$$



Slika 36: Zadatak riješen

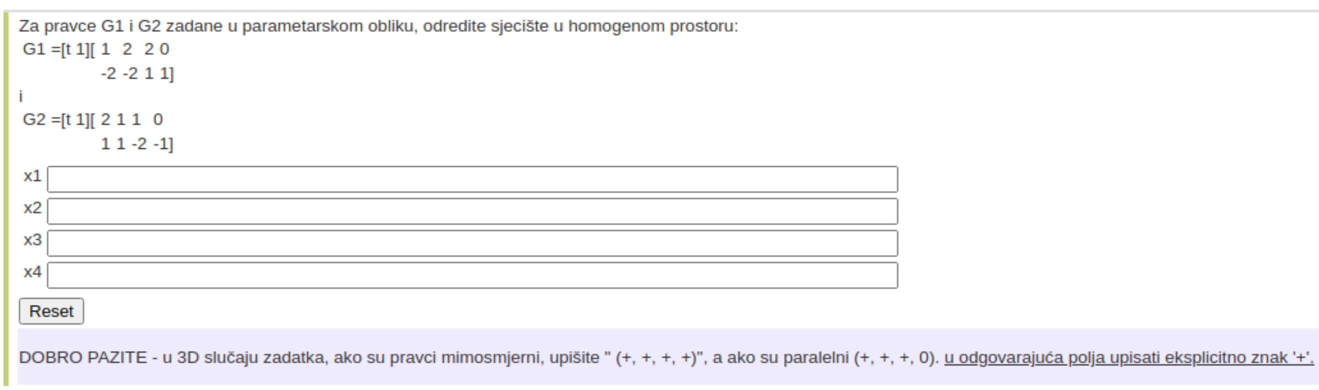
3.2 Trodimenzijske

3.2.1 Sjecište dva pravca u parametarskom obliku

Kao i u 2D slučaju, parametarski oblik u 3D slučaju je predstavljen pomoću jednog parametra t kojim su opisane sve tri koordinate.

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 - V_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & h \end{bmatrix} \tag{26}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & h \end{bmatrix}$$

gdje V_0 i V_1 predstavljaju dvije točke kroz koje pravac prolazi. Ukratko se parametarski oblik može opisati kao oblik koji se sastoji od koeficijenata smjera pravca (gornji redak matrice) i točke kroz koju prolazi (donji redak matrice).


Za pravce G1 i G2 zadane u parametarskom obliku, odredite sjecište u homogenom prostoru:
G1 =[t 1][1 2 2 0
-2 -2 1 1]
i
G2 =[t 1][2 1 1 0
1 1 -2 -1]
x1
x2
x3
x4
Reset
DOBRO PAZITE - u 3D slučaju zadatka, ako su pravci mimosmjerni, upišite " (+, +, +, +)", a ako su paralelni (+, +, +, 0). u odgovarajuća polja upisati eksplicitno znak '+'.

Slika 37: Zadatak

Prva stvar koju je potrebno napraviti u zadatku je izjednačiti h koordinate. Najjednostavniji način je taj da ih obje postavite na 1. Na prvom pravcu je postavljena na jedinicu, ali na drugom nije:

$$G_2 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ili jednostavnije rečeno, donji redak matrice pravca G_2 pomnožimo s -1.

Sada kada su h koordinate izjednačene, prvo provjeravamo jesu li pravci paralelni. Paralelnost je najjednostavnije provjeriti tako da koeficijente oba pravca postavimo u omjere te ako su svi jednaki, pravci su paralelni:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{27}$$

U našem slučaju:

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

Omjer $\frac{a_1}{a_2}$ nije jednak ostalim omjerima te se zaključuje da pravci nisu paralelni.

Sljedeće pokušavamo naći presjek pravaca. Jednostavnosti radi, parametar pravca G_2 će nadalje biti označavan sa s kako ne bi došlo do zabune. Kako bismo pronašli sjecište, potrebno je izjednačiti koordinate oba pravca:

$$x_1 = t - 2 \qquad x_2 = 2s - 1$$

$$y_1 = 2t - 2 \qquad y_2 = s - 1$$

$$z_1 = 2t + 1 \qquad z_2 = s + 2$$

$$x_1 = x_2$$

$$y_1 = y_2$$

$$z_1 = z_2$$

$$t - 2 = 2s - 1$$

$$2t - 2 = s - 1$$

$$2t + 1 = s + 2$$

Nakon što riješimo po dvije od tri jednadžbe s dvije nepoznanice (npr. prva i druga), za rješenje se dobije

$$t = \frac{1}{3}$$

$$s = -\frac{1}{3}$$

Sada ta rješenja uvrstimo u treću jednadžbu (onu koju nismo iskoristili za dobivanje rješenja) i ako se rezultat poklapa, pravci nisu mimosmjerni.

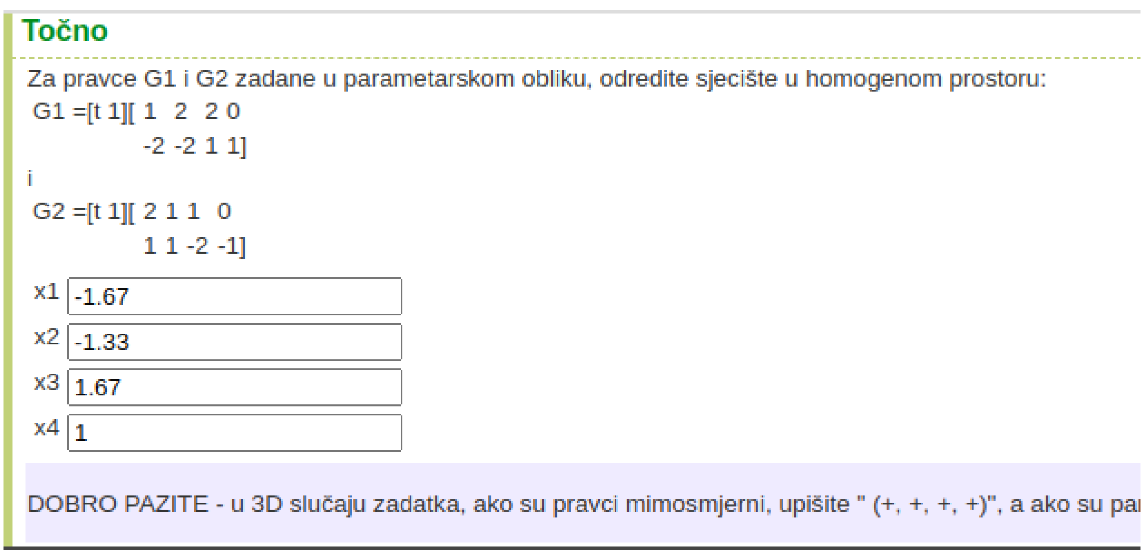
$$2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = -\frac{1}{3} + 2 \quad => \quad \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Pravci nisu mimosmjerni, a njihov presjek se dobije tako da t uvrstimo u jednadžbu prvog pravca ili s u jednadžbu drugog.

$$x_1 = t - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -1.67$$

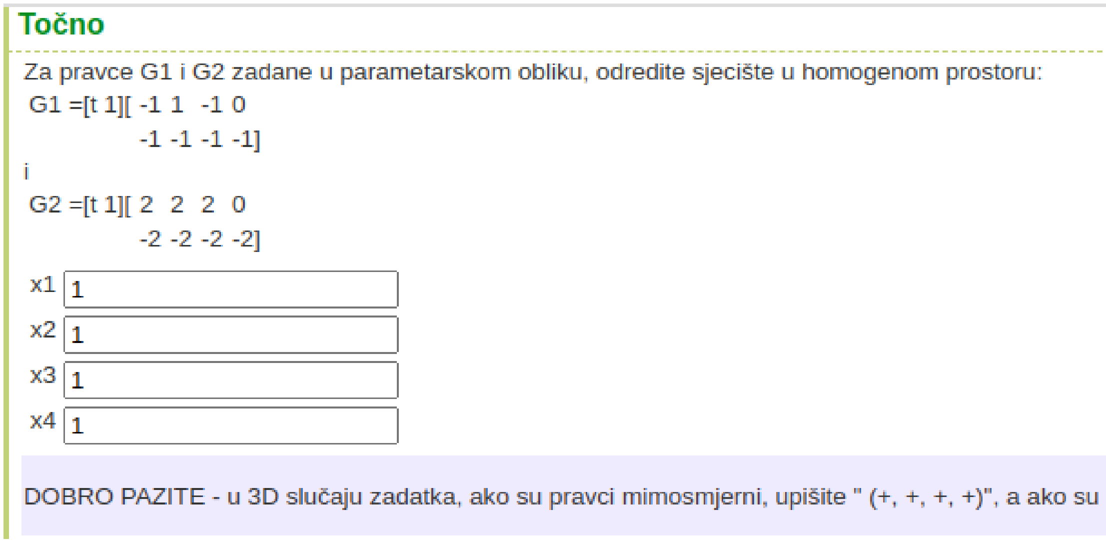
$$y_1 = 2t - 2 = 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 = -1.33$$

$$z_1 = 2t + 1 = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 1.67$$



Slika 38: Zadatak riješen

Neke zadatke je moguće riješiti nakon izjednačavanja h koordinata


Točno

Za pravce G1 i G2 zadane u parametarskom obliku, odredite sjecište u homogenom prostoru:

G1 =[t 1][-1 1 -1 0
-1 -1 -1 -1]

i

G2 =[t 1][2 2 2 0
-2 -2 -2 -2]

x1 1

x2 1

x3 1

x4 1

DOBRO PAZITE - u 3D slučaju zadatka, ako su pravci mimosmjerni, upišite " (+, +, +, +)", a ako su

Slika 39: Zadatak riješen 2

Nakon izjednačavanja h koordinata se dobije da oba pravca prolaze kroz točku $T(1, 1, 1, 1)$, ako oba pravca prolaze kroz istu točku, ona im mora biti sjecište. To može uštedjeti veliku količinu vremena.

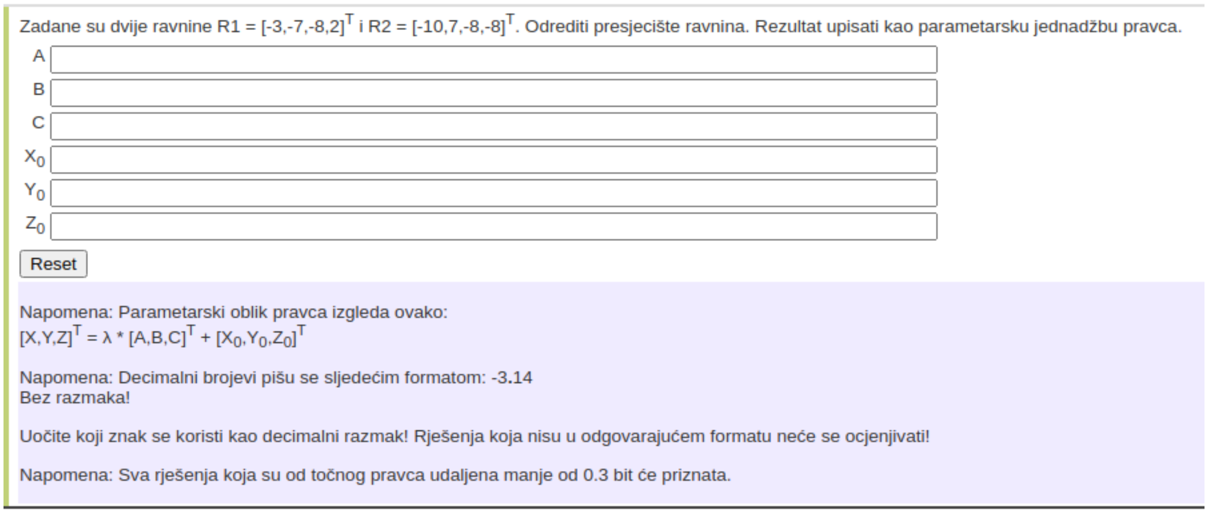
3.2.2 Sjecište dvije ravnine u implicitnom obliku

Jednadžba ravnine glasi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{28}$$

Detaljnije o ravninama se može pronaći u knjizi na stranici 35. Normala na ravninu (pravac okomit na ravninu) se može iščitati iz jednadžbe ravnine:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \tag{29}$$



Zadane su dvije ravnine R1 = [-3,-7,-8,2]^T i R2 = [-10,7,-8,-8]^T. Odrediti presjecište ravnina. Rezultat upisati kao parametarsku jednadžbu pravca.

A

B

C

X_0

Y_0

Z_0

Reset

Napomena: Parametarski oblik pravca izgleda ovako:
$[X,Y,Z]^T = \lambda * [A,B,C]^T + [X_0,Y_0,Z_0]^T$

Napomena: Decimalni brojevi pišu se sljedećim formatom: -3.14
Bez razmaka!

Uočite koji znak se koristi kao decimalni razmak! Rješenja koja nisu u odgovarajućem formatu neće se ocjenjivati!

Napomena: Sva rješenja koja su od točnog pravca udaljena manje od 0.3 bit će priznata.

Slika 40: Zadatak

U zadatku su zadane matrice koeficijenata pojedinih matrica. Jednadžbe obje matrice glase:

$$R_1 ... -3x - 7y - 8z + 2 = 0$$

$$R_2 ... -10x + 7y - 8z - 8 = 0$$

Sad zapravo imamo dvije jednadžbe s tri nepoznanice. Kako bismo najlakše našli pravac koji je presjecište ove dvije ravnine, moguće je pronaći dvije točke koje leže na tom pravcu. Na primjer, ako z koordinatu obje ravnine postavimo na 0, dobit ćemo jednu točku koja je zajednička objema ravninama (odnosno leži na pravcu presjecišta). Točnije, dobit ćemo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koje će nam na poslijetku dati x i y odnosno točku koja leži na pravcu i u obje ravnine, a čija je z koordinata jednaka 0. Uz $z = 0$:

$$-3x - 7y + 2 = 0$$

$$-10x + 7y - 8 = 0$$

$$x = -\frac{6}{13}$$

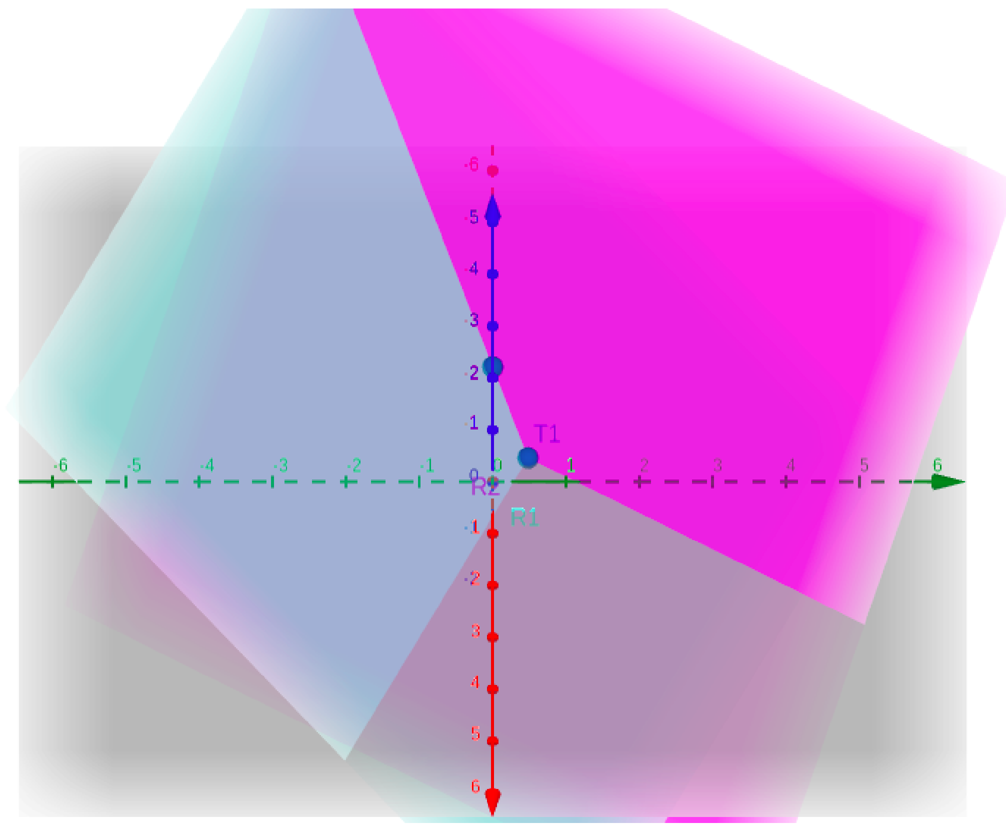
$$y = \frac{44}{91}$$

Ovime je definirana prva točka pravca presjecišta => $T_1(-\frac{6}{13}, \frac{44}{91}, 0)$. Drugu možemo pronaći na sličan način, samo ovaj put y koordinatu postavimo na nulu.

$$-3x - 8z + 2 = 0$$
$$-10x - 8z - 8 = 0$$
$$x = -\frac{10}{7}$$
$$z = \frac{11}{14}$$

Odnosno $T_2(-\frac{10}{7}, 0, \frac{11}{14})$.

Ako za ijednu od koordinata (y i z) ne dobijemo rješenja dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama, samo pokušajte sa drugom koordinatom (x).



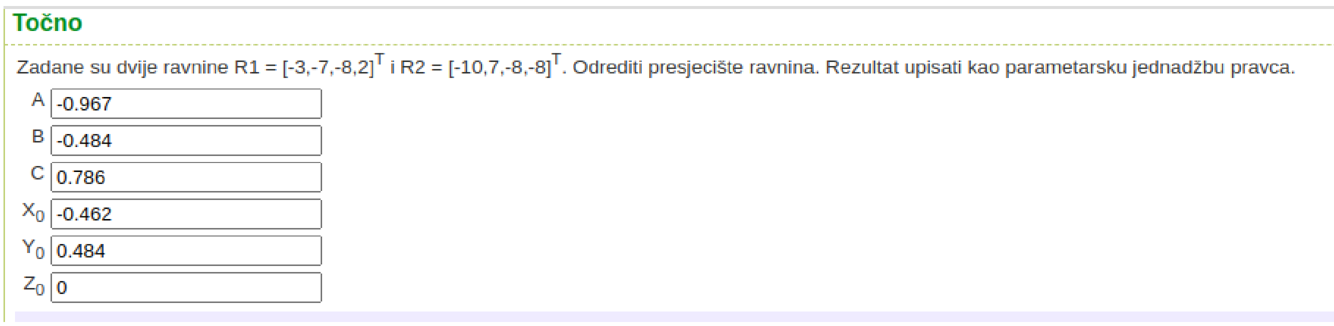
Slika 41: Presjek dviju ravnina i dobivene točke

Sada kada imamo dvije točke, možemo odrediti jednadžbu pravca u parametarskom obliku (formula 26). Znamo da se parametarski oblik sastoji od koeficijenta smjera $(T_2 - T_1)$ i točke kroz koju prolazi:

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{10}{7} + \frac{6}{13} & 0 - \frac{44}{91} & \frac{11}{14} - 0 \\ -\frac{6}{13} & \frac{44}{91} & 0 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.967 & -0.484 & 0.786 \\ -0.462 & 0.484 & 0 \end{bmatrix}$$

Gornji stupac su koeficijenti smjera pravca A, B i C, a u donjem stupcu su x_0, y_0 i z_0.



Slika 42: Zadatak riješen

3.2.3 Sjecište implicitne i parametarske ravnine

Poznato je da se jednadžba ravnine može izračunati pomoću tri točke koje ne leže na istom pravcu (nekolinerane). Parametarski se oblik jednadžbe ravnine dobije upravo pomoću tri točke:

$$R = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 - V_0 \\ V_2 - V_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

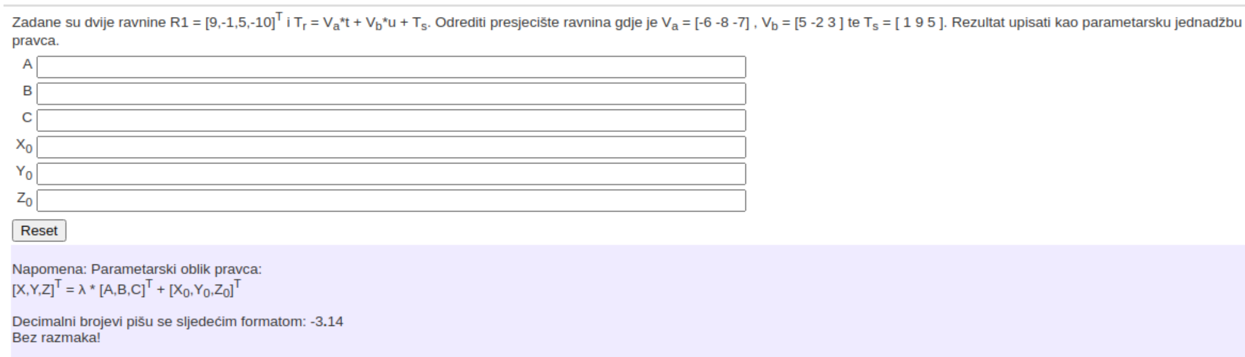
$$= \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & 0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & h \end{bmatrix}$$

ili

$$R = (V_1 - V_0) \cdot u + (V_2 - V_0) \cdot v + V_0 \tag{31}$$

gdje V_0, V_1 i V_2 predstavljaju tri točke. Iz parametarskog oblika normala se može dobiti na sljedeći način:

$$(V_1 - V_0) \times (V_2 - V_0) = \vec{n} \tag{32}$$


Zadane su dvije ravnine R1 = $[9,-1,5,-10]^T$ i $T_r = V_a*t + V_b*u + T_s$. Odrediti presjecište ravnina gdje je V_a = [-6 -8 -7] , V_b = [5 -2 3] te T_s = [1 9 5]. Rezultat upisati kao parametarsku jednadžbu pravca.

A

B

C

X_0

Y_0

Z_0

Reset

Napomena: Parametarski oblik pravca:
$[X,Y,Z]^T = \lambda * [A,B,C]^T + [X_0,Y_0,Z_0]^T$

Decimalni brojevi pišu se sljedećim formatom: -3.14
Bez razmaka!

Slika 43: Zadatak

U ovom zadatku je cilj izjednačiti oba oblika jednadžbi ravnine. Kako smo u prethodnom zadatku imali dvije jednadžbe implicitno zadane, tako ćemo i ovdje parametarski oblik pretvoriti u implicitni. Jednadžba ravnine T_r u parametarskom obliku glasi:

$$T_r = \begin{bmatrix} t & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ T_s \end{bmatrix}$$

gdje V_a predstavlja $(V_1 - V_0)$, tj. V_b predstavlja $(V_2 - V_0)$, odnosno T_s je V_0. Kad uvrstimo brojeve:

$$T_r = \begin{bmatrix} t & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -8 & -7 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Sada ćemo taj oblik pretvoriti u implicitni. Prvo će se izračunati normala prema izrazu 32:

$$V_a \times V_b = \vec{n}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ -17 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Sada imamo jednadžbu ravnine T_r:

$$-38x - 17y + 52z + D = 0$$

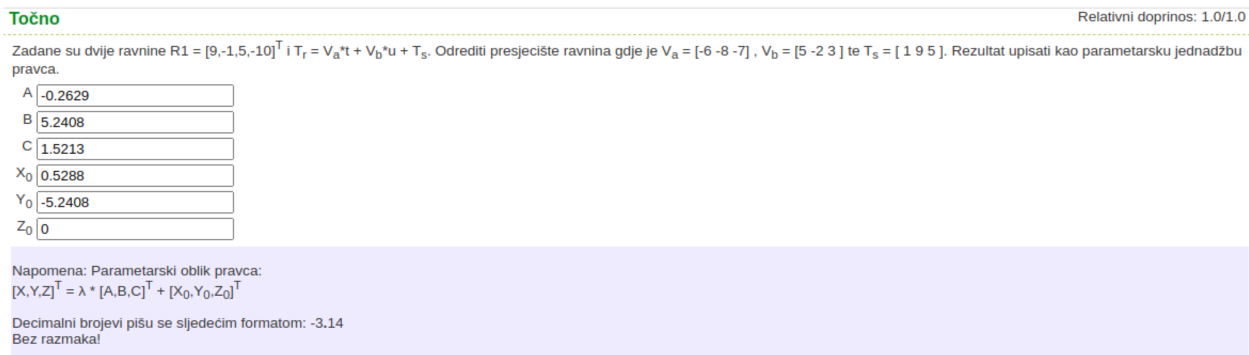
a D ćemo izračunati tako da preostalu točku T_s uvrstimo u novodobivenu jednadžbu:

$$-38 \cdot 1 - 17 \cdot 9 + 52 \cdot 5 + D = 0$$

$$D = -69$$

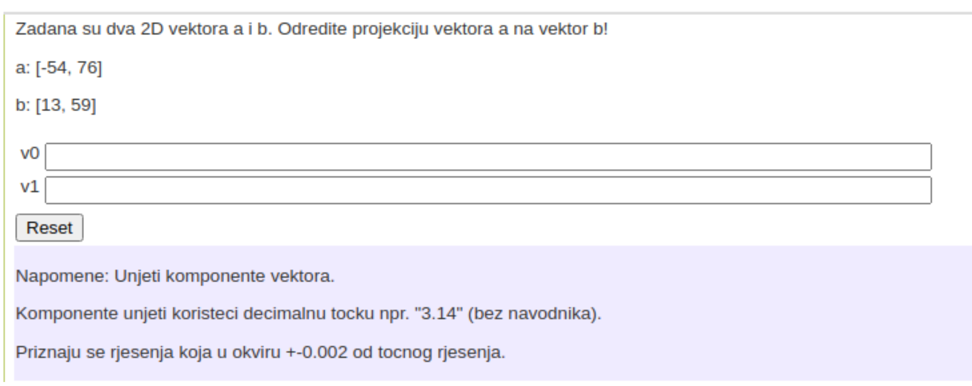
$$T_r ... - 38x - 17y + 52z - 69 = 0$$

Sada kad imamo dvije jednadžbe u implicitnom obliku, zadatak se rješava kao i prethodni (3.2.2).



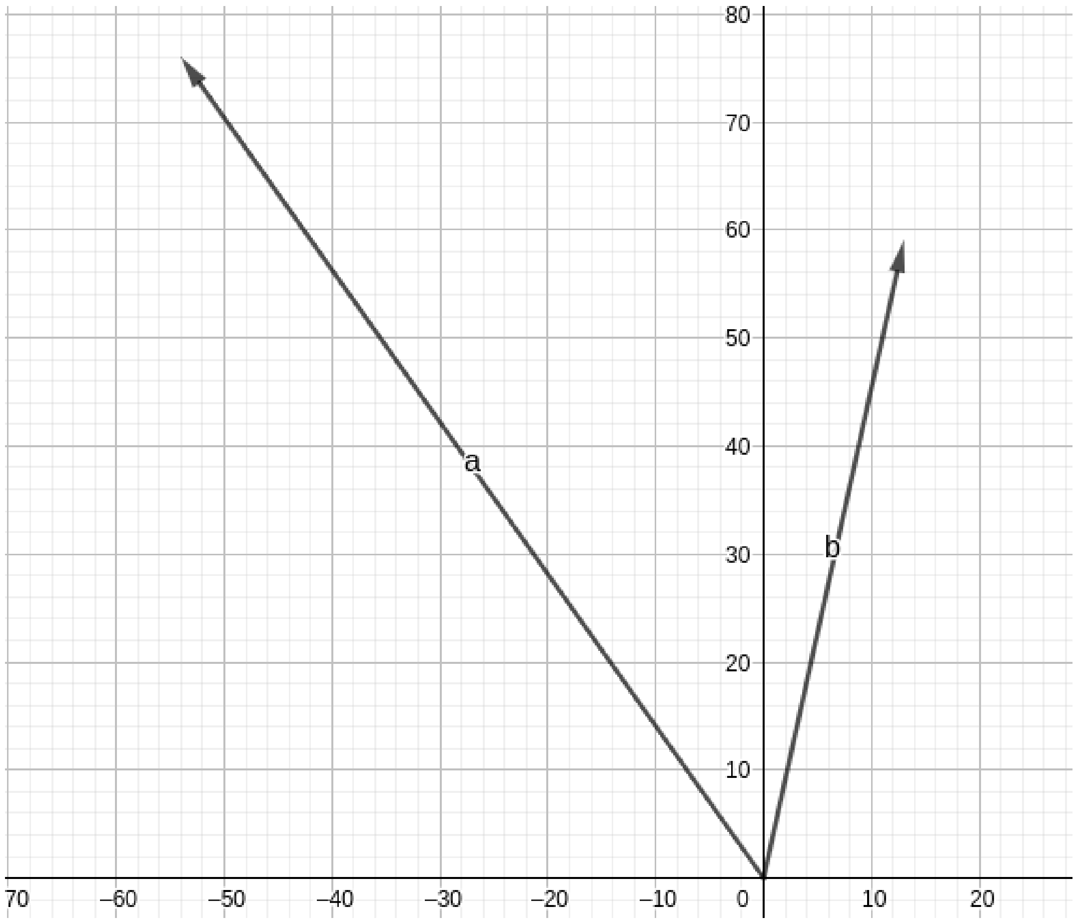
Slika 44: Zadatak riješen

3.2.4 Projekcija vektora na vektor - 2D slučaj



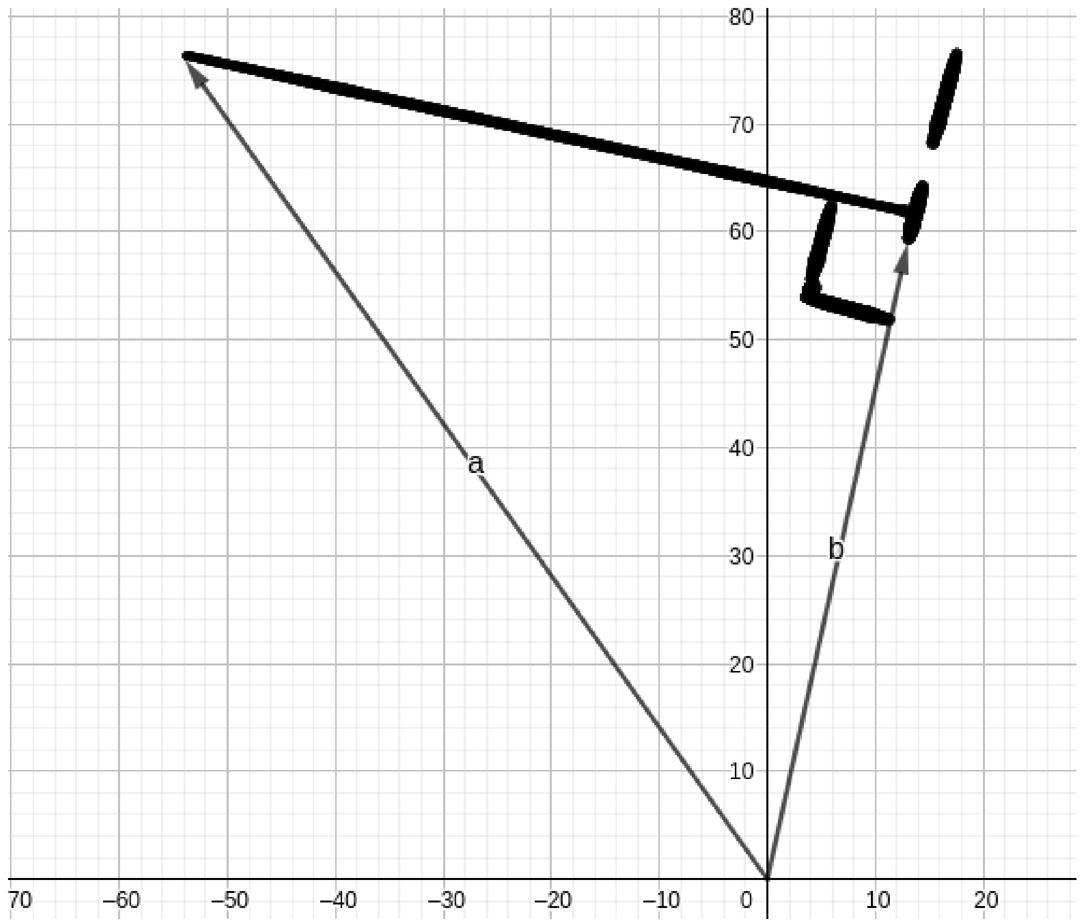
Slika 45: Zadatak

U ravnini ta dva vektora izgledaju:



Slika 46: Oba vektora u ravnini

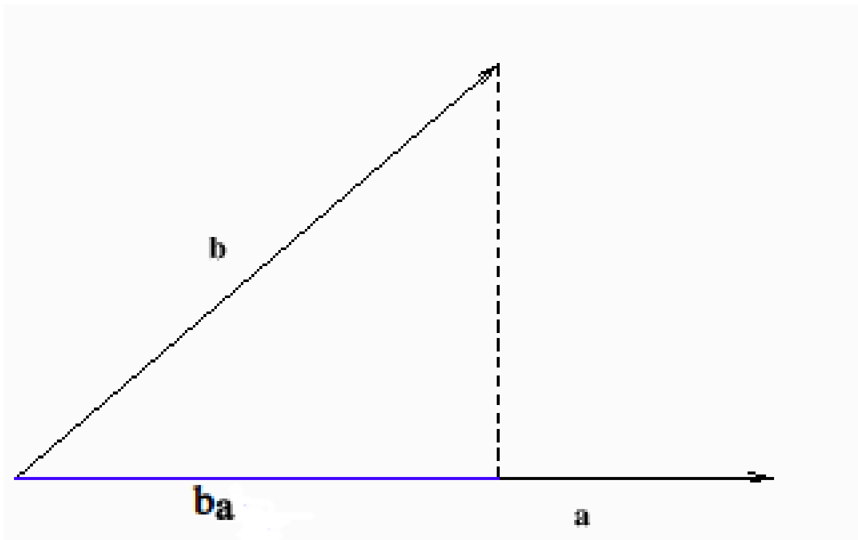
Projekcija jednog vektora na drugi izgleda ovako:



Slika 47: Projekcija vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$

Nadalje, znamo da je formula skalarnog umnoška:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot cos(\alpha) \tag{33}$$



Slika 48: Skalarni umnožak

Na slici 48 je vidljiva interpretacija skalarnog umnoška:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b_a| = |a| \cdot |b| \cdot cos(\alpha)$$

$$|b_a| = |b| \cdot cos(\alpha)$$

$$|b_a| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a|}$$

Odnosno, b_a je duljina projekcije vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$. Sličnu paralelu možemo povući s ovim zadatkom. Iz zadatka možemo izračunati duljinu projekcije vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

$$|a_b| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|b|} \tag{34}$$

Odnosno, kada uvrstimo konkretne vrijednosti:

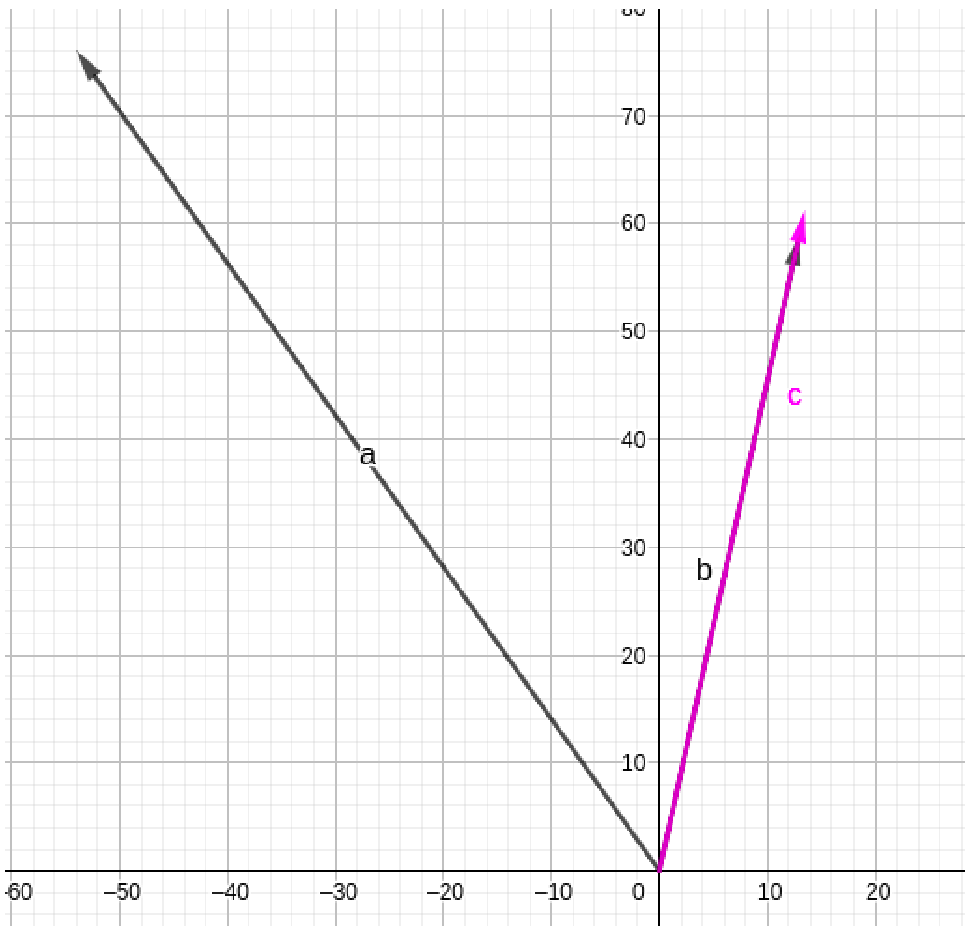
$$|a_b| = \frac{-54 \cdot 13 + 76 \cdot 59}{\sqrt{13^2 + 59^2}} = 62.6$$

Sada kada imamo duljinu projekcije, možemo jednostavno izračunati vektor projekcije. Naime, kako projekcija vektora a_b leži na vektoru $\vec{b}$, dovoljno je duljinu projekcije pomnožiti s normiranim vektorom $\vec{b}$ kako bismo dobili vektor projekcije:

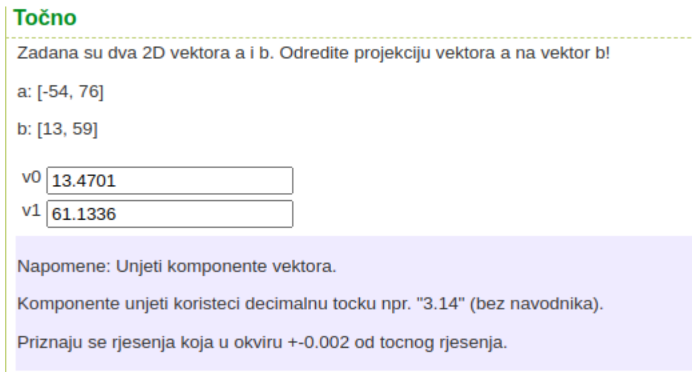
$$\vec{a_b} = |a_b| \cdot \frac{\vec{b}}{|b|}$$

S konkretnim vrijednostima:

$$\vec{a_b} = 62.6 \cdot \frac{\begin{bmatrix} 13 \\ 59 \end{bmatrix}}{\sqrt{13^2 + 59^2}} = \begin{bmatrix} 13.4701 \\ 61.1336 \end{bmatrix}$$



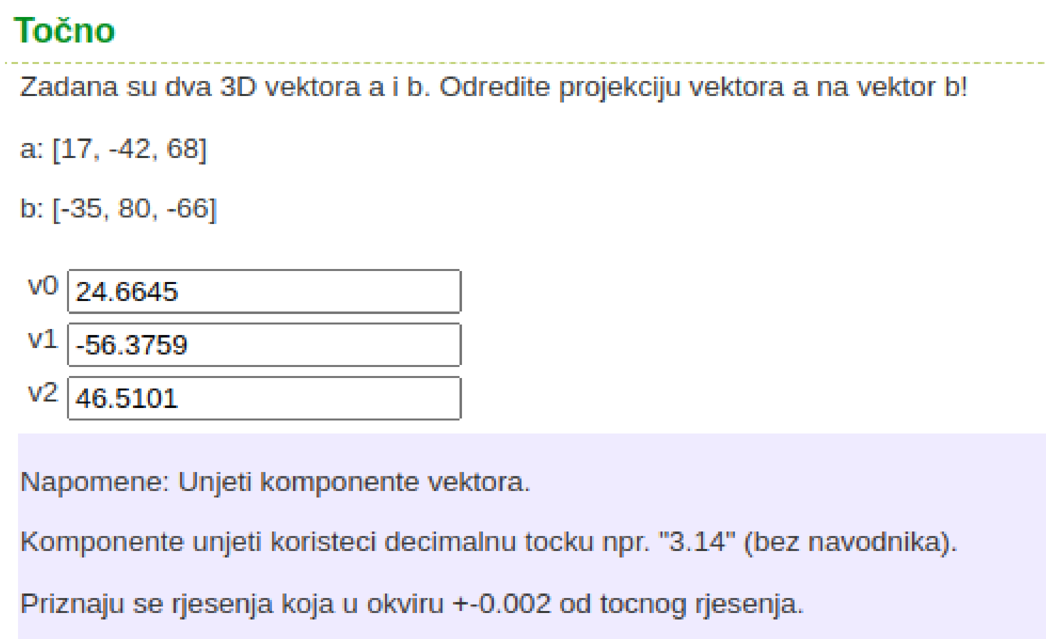
Slika 49: Prikaz projekcije (ružičasto)



Slika 50: Zadatak riješen

3.2.5 Projekcija vektora na vektor - 3D slučaj

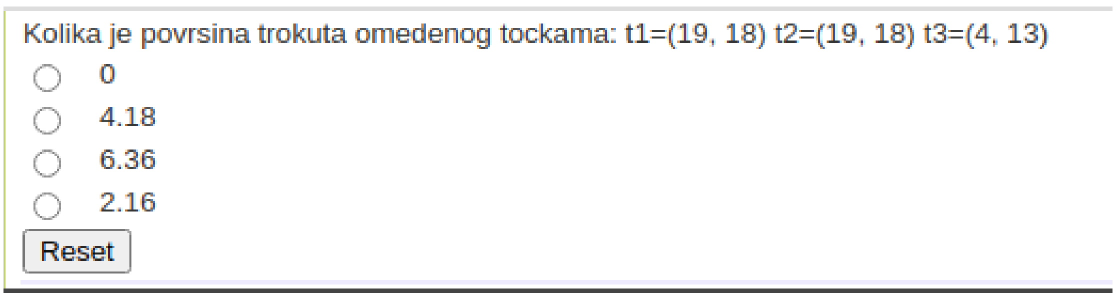
Kao i u 2D slučaju, formule vrijede i za 3D slučaj (3.2.4).



Slika 51: Zadatak riješen

3.2.6 Određivanje površine trokuta - 2D slučaj

Prije rješavanja zadataka, dobro je znati koristiti kalkulator za računanje vektora (1).



Kolika je povrsina trokuta omedenog tockama: t1=(19, 18) t2=(19, 18) t3=(4, 13)

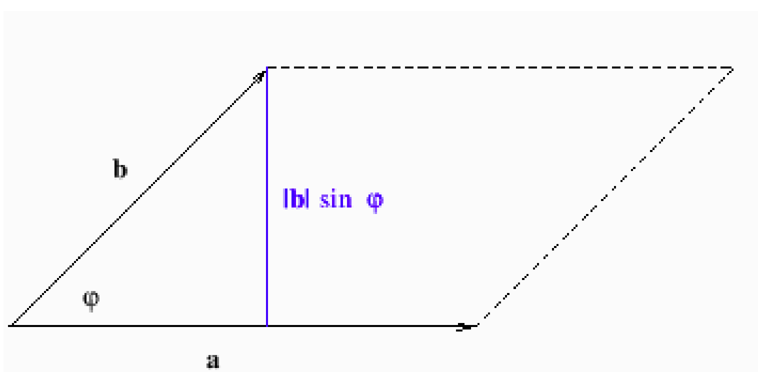
- 0
- 4.18
- 6.36
- 2.16

Reset

Slika 52: Zadatak

Površinu trokuta zadanog točkama je najlakše izračunati koristeći se formulom za duljinu vektorskog umnoška.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |a| \cdot |b| \cdot sin(\varphi) \tag{35}$$



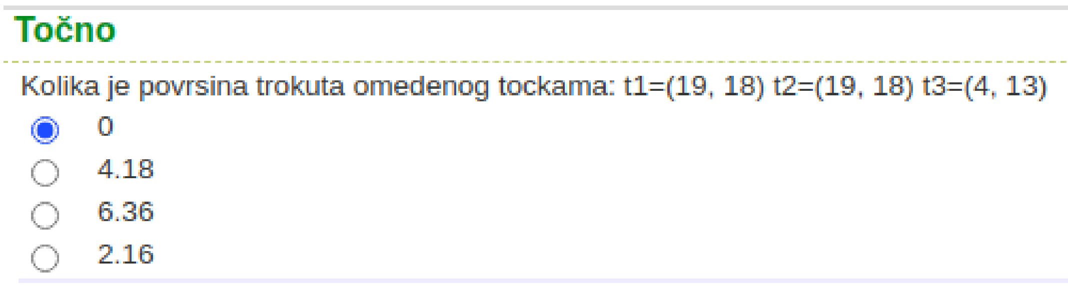
Slika 53: Duljina vektorskog umnoška

Sa slike 53 je vidljivo da norma (duljina) vektorskog umnoška predstavlja površinu paralelograma kojeg dva vektora tvore. Pošto mi u zadatku imamo trokut, tu isti formulu ćemo samo podijeliti sa 2. Konkretna formula za izračun površine trokuta dana je u nastavku:

$$P_{\Delta} = \frac{|(t_2 - t_1) \times (t_3 - t_1)|}{2}$$

S tim da je dobro za napomenuti da nije bitno koja se točka oduzima od koje ili kojim redoslijedom se množe razlike točaka, sve dok razlike točaka čine dva nekolinearna vektora.

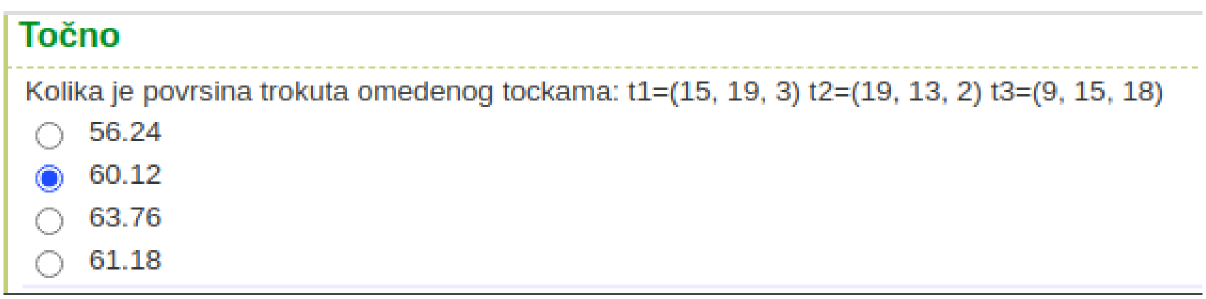
Kad se uvrste konkretne vrijednosti za rješenje se dobije 0.



Slika 54: Zadatak riješen

3.2.7 Određivanje površine trokuta - 3D slučaj

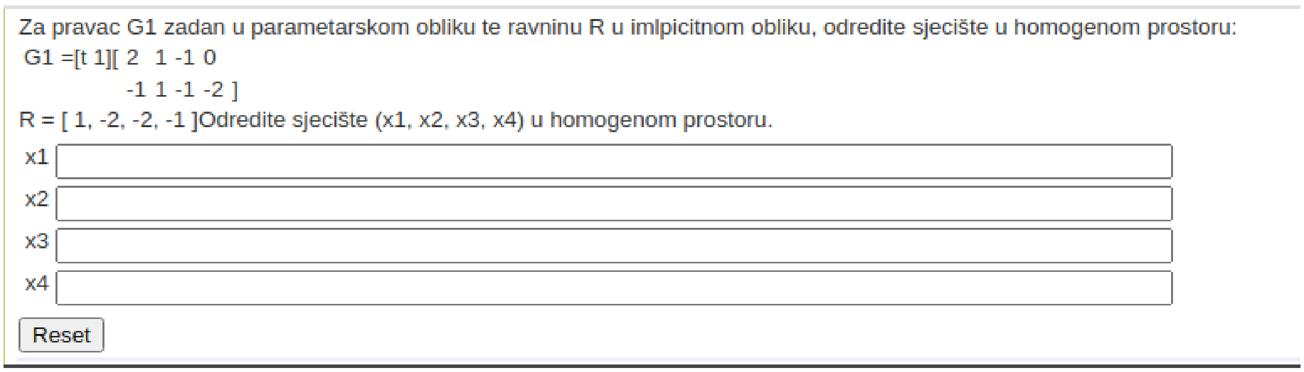
U slučaju 3D trokuta, koriste se isti postupci kao i u 2D slučaju (3.2.6).



Slika 55: Zadatak riješen

3.2.8 Sjecište pravca i ravnine - Ravnina zadana implicitnim oblikom

Za podsjetnik jednadžbe ravnine zadane u implicitnom obliku: 3.2.2.
Za podsjetnik pravca u parametarskom obliku: 3.2.1.


Za pravac G1 zadan u parametarskom obliku te ravninu R u imlpicitnom obliku, odredite sjecište u homogenom prostoru:
G1 =[t 1][2 1 -1 0
-1 1 -1 -2]
R = [1, -2, -2, -1]Odredite sjecište (x1, x2, x3, x4) u homogenom prostoru.

x1

x2

x3

x4

Reset

Slika 56: Zadatak

Prva stvar koju je potrebno napraviti u zadatku je izjednačiti homogenu koordinatu pravca s jedinicom. To ćemo napraviti tako da donji redak matrice podijelimo s -2 u ovom slučaju. Nakon toga, matrica pravca G_1 izgleda ovako:

$$G_1 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Iz parametarskog oblika znamo da koordinate pravca G_1 izgledaju ovako:

$$x = 2t + \frac{1}{2}$$

$$y = t - \frac{1}{2}$$

$$z = -t + \frac{1}{2}$$

Nadalje, jednadžba ravnine R:

$$x - 2y - 2z - 1 = 0$$

Kako bismo našli točku presjecišta, uvrstimo koordinate pravca G_1 u jednadžbu ravnine R:

$$2t + \frac{1}{2} - 2 \cdot (t - \frac{1}{2}) - 2 \cdot (-t + \frac{1}{2}) - 1 = 0$$

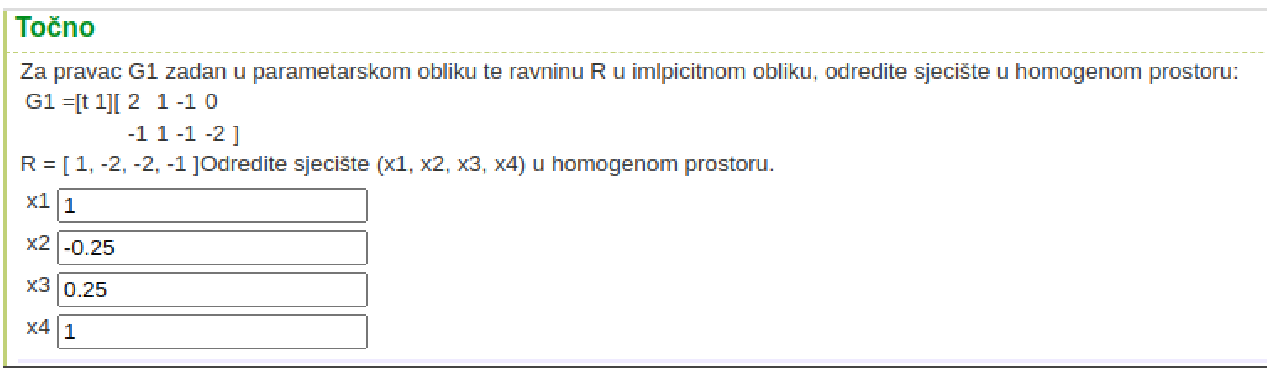
$$t = 0.25$$

Kako bismo dobili točku, dobiveni t uvrstimo u parametarski oblik jednadžbe pravca.

$$x = 2 \cdot 0.25 + \frac{1}{2} = 1$$

$$y = 0.25 - \frac{1}{2} = -0.25$$

$$z = -0.25 + \frac{1}{2} = 0.25$$


Točno

Za pravac G1 zadan u parametarskom obliku te ravninu R u imlpicitnom obliku, odredite sjecište u homogenom prostoru:

G1 =[t 1][2 1 -1 0
-1 1 -1 -2]

R = [1, -2, -2, -1]Odredite sjecište (x1, x2, x3, x4) u homogenom prostoru.

x1 1

x2 -0.25

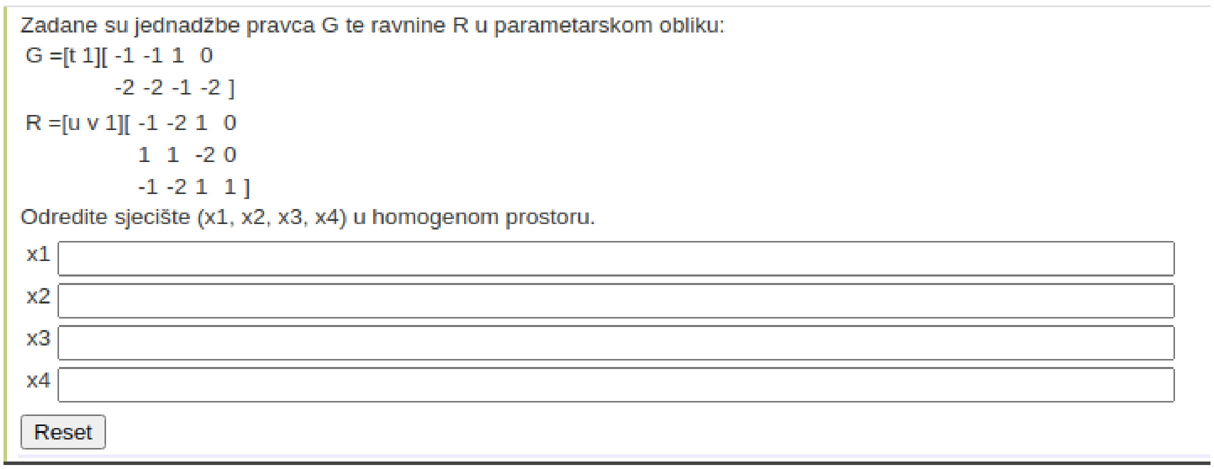
x3 0.25

x4 1

Slika 57: Zadatak riješen

3.2.9 Sjecište pravca i ravnine - Ravnina zadana parametarskim oblikom

Za podsjetnik pravca u parametarskom obliku: 3.2.1.
Za podsjetnik jednadžbe ravnine zadane u parametarskom obliku: 3.2.3.
Prva stvar koju je potrebno napraviti u zadatku je izjednačiti homogene


Zadane su jednadžbe pravca G te ravnine R u parametarskom obliku:
G =[t 1][-1 -1 1 0
-2 -2 -1 -2]
R =[u v 1][-1 -2 1 0
1 1 -2 0
-1 -2 1 1]
Odredite sjecište (x1, x2, x3, x4) u homogenom prostoru.
x1
x2
x3
x4
Reset

Slika 58: Zadatak

koordinate (najdonji reci) pravca i ravnine s jedinicom. Vidimo da je u zadatku homogena koordinata ravnine već 1, ali homogena koordinata pravca nije. Nakon izjednačavanja:

$$G = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Sljedeće, prikažemo x, y i z preko parametara:

$$\begin{array}{cc} \text{pravac:} & \text{ravnina:} \\ x = -t + 1 & x = -u + v - 1 \\ y = -t + 1 & y = -2u + v - 2 \\ z = t + \frac{1}{2} & z = u - 2v + 1 \end{array}$$

Kad izjednačimo x-eve, y-one i z-ove:

$$-t + 1 = -u + v - 1$$

$$-t + 1 = -2u + v - 2$$

$$t + \frac{1}{2} = u - 2v + 1$$

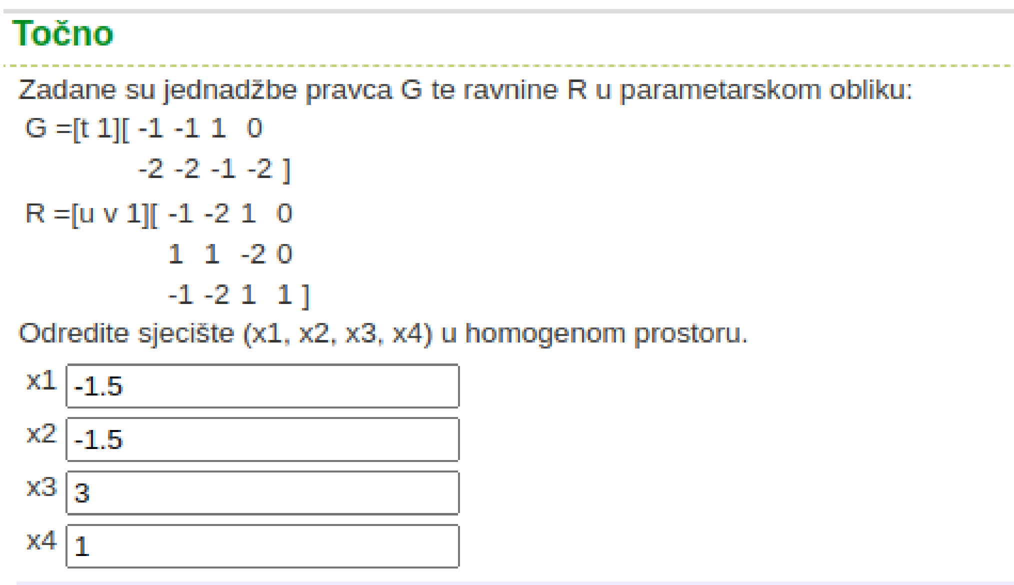
Nakon rješavanja tri jednadžbe s tri nepoznanice, dobije se:

$$t = 2.5$$

$$u = -1$$

$$v = -1.5$$

Kako bismo dobili točku presjecišta uvrstimo t u jednadžbu pravca ili u i v u jednadžbu ravnine te za rješenje se dobije točka $T(-1.5, -1.5, 3)$


Točno

Zadane su jednadžbe pravca G te ravnine R u parametarskom obliku:

G =[t 1][-1 -1 1 0
-2 -2 -1 -2]

R =[u v 1][-1 -2 1 0
1 1 -2 0
-1 -2 1 1]

Odredite sjecište (x1, x2, x3, x4) u homogenom prostoru.

x1 -1.5

x2 -1.5

x3 3

x4 1

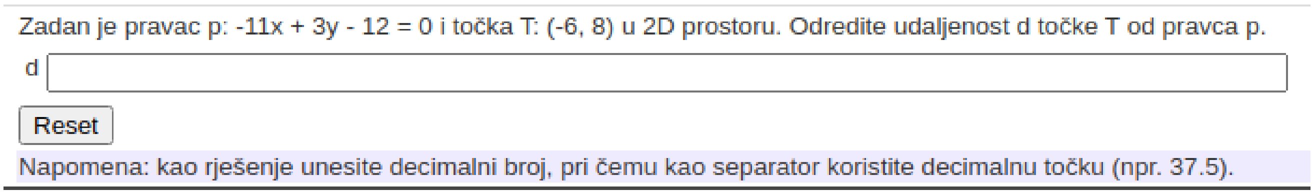
Slika 59: Zadatak riješen

3.2.10 Udaljenost točke do pravca - 2D slučaj

Ako bismo normirali jednadžbu pravca zadanu u implicitnom obliku, uvrštavanjem bilo koje točke u takav oblik, dobili bismo udaljenost točke do pravca (knjiga str. 29).

$$ax + by + c = 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \tag{36}$$



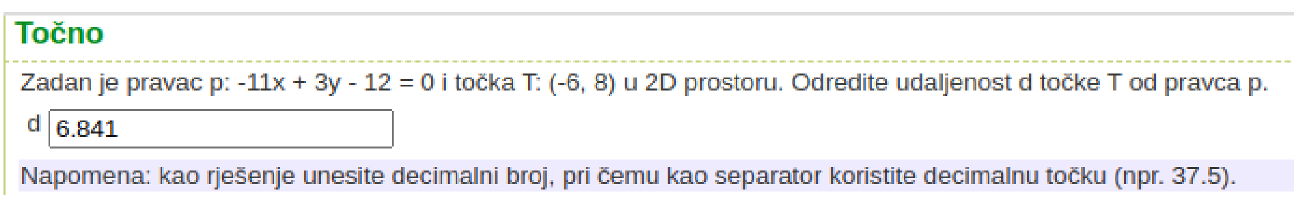
Slika 60: Zadatak

Prvo normirano jednadžbu pravca:

$$-\frac{11}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}\cdot x+\frac{3}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}\cdot y-\frac{12}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}=0$$

Nakon toga, u normiranu jednadžbu, uvrstimo koordinate točke T i dobijemo udaljenost točke od pravca:

$$-\frac{11}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}\cdot(-6)+\frac{3}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}\cdot 8-\frac{12}{\sqrt{(-11)^2+3^2}}=6.841$$

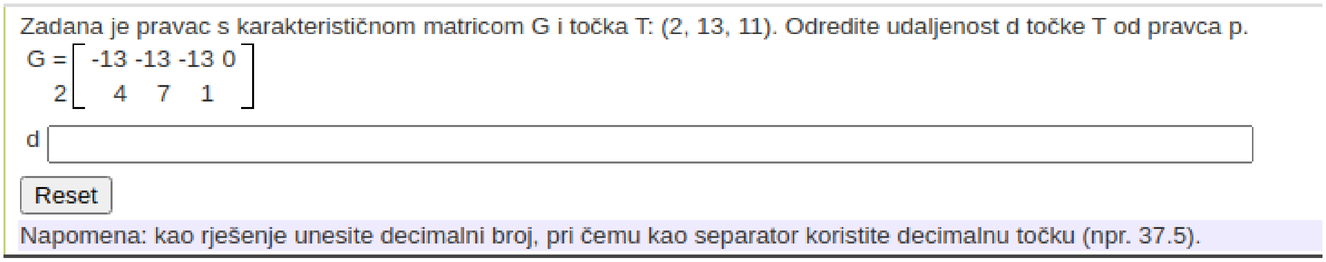


Slika 61: Zadatak riješen

3.2.11 Udaljenost točke do pravca - 3D slučaj

Kako u 3D slučaju ne postoji jednadžba pravca u implicitnom obliku, ne možemo se poslužiti trikom kao u 2D slučaju. Rješenje preko skalarnog umnoška se može pronaći na sljedećem linku https://www.youtube.com/watch?v=gFvo82jINqk. A ovdje ćemo riješiti na drugi način. Prvo ćemo se prisjetiti formule za udaljenost dvije točke:

$$d(T_1,T_0)=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2} \tag{37}$$



Slika 62: Zadatak

Karakteristična matrica pravca je malo nespretno zadana, ona zapravo izgleda ovako:

$$G = \begin{bmatrix} -13 & -13 & -13 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Prvo treba provjeriti iznos homogene koordinate, te ako nije 1, izjednačiti s 1. Nekâ točka pravca G ima koordinate:

$$x = -13t + 2$$

$$y = -13t + 4$$

$$z = -13t + 7$$

Kada se uvrsti u formulu za udaljenost, dobije se:

$$d(T_G, T) = \sqrt{(-13t + 2 - 2)^2 + (-13t + 4 - 13)^2 + (-13t + 7 - 11)^2}$$

$$= \sqrt{(-13t)^2 + (-13t - 9)^2 + (-13t - 4)^2}$$

$$= \sqrt{169t^2 + 169t^2 + 234t + 81 + 169t^2 + 104t + 16}$$

$$= \sqrt{507t^2 + 338t + 97}$$

Sada treba razmišljati na način da je potrebna **najmanja** udaljenost točke od pravca, tj. minimum. Imajući to na umu, potrebna je derivacija funkcije udaljenosti, a funkcija postiže minimum kad je derivacija jednaka 0. (Deriviranje funkcije korijena nije potrebno, postoji malo brži način koji će biti objašnjen poslije u tekstu ovdje).

$$\frac{d}{dt}(d(T_G, T)) = 0$$

Po pravilu deriviranja korijena i složene derivacije

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{38}$$

se dobije

$$\frac{1014t + 338}{2\sqrt{507t^2 + 338t + 97}} = 0$$

Kako u jednadžbi koja sadržava nepoznanicu u nazivniku, nazivnik ne smije biti jednak 0, provjeravamo samo brojnik. Sve deriviranje korijena smo mogli izbjeći na način da smo derivirali kvadrat funkcije udaljenosti i izjednačili s 0. Dobili bismo isti rezultat:

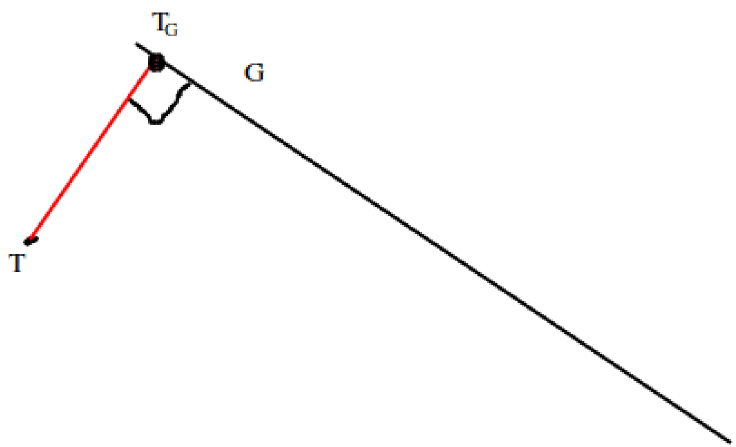
$$\frac{d}{dt}(d(T_G, T)^2) = 0$$

$$1014t + 338 = 0$$

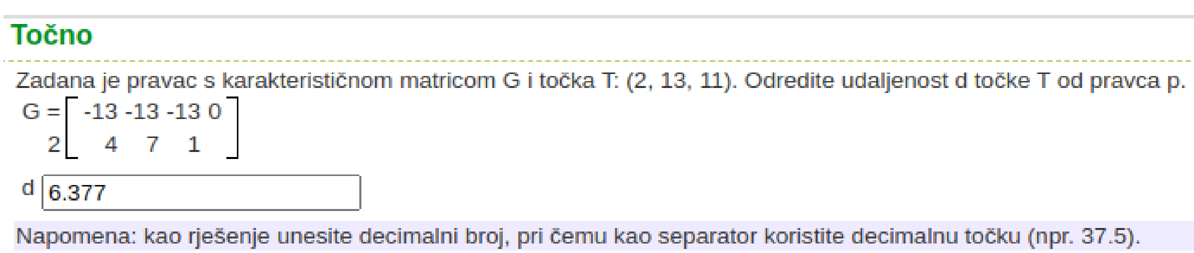
$$t = -0.33$$

Na ovaj način smo dobili parametar t koji daje točku koja leži na pravcu okomitom s obzirom na zadani pravac. Da bismo dobili udaljenost, dobiveni t uvrštavamo u jednadžbu:

$$d(T_G, T) = \sqrt{507t^2 + 338t + 97} = 6.377$$



Slika 63: Skica dobivenog t i točke T_G



Točno

Zadana je pravac s karakterističnom matricom G i točka T: (2, 13, 11). Odredite udaljenost d točke T od pravca p.

$$G = \begin{bmatrix} -13 & -13 & -13 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

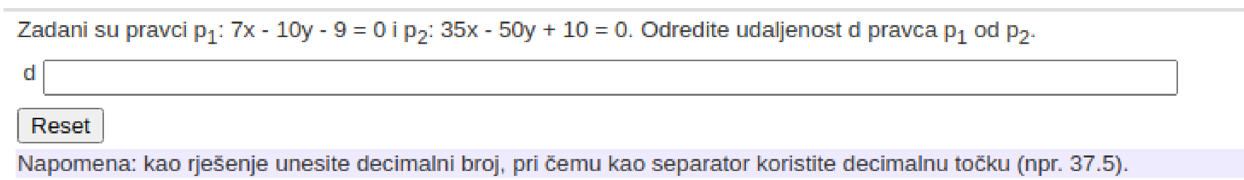
d 6.377

Napomena: kao rješenje unesite decimalni broj, pri čemu kao separator koristite decimalnu točku (npr. 37.5).

Slika 64: Zadatak riješen

3.2.12 Udaljenost dva pravca - 2D slučaj

Što se tiče računanja udaljenosti dva pravca u 2D slučaju, udaljenost se može jedino računati za paralelne pravce.



Slika 65: Zadatak

Ovdje je najprije dobro provjeriti jesu li dva pravca paralelna. To se može provjeriti gledajući omjere koeficijenata oba pravca te ako su oni jednaki, pravci su paralelni.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \tag{39}$$

Konkretno, u zadatku:

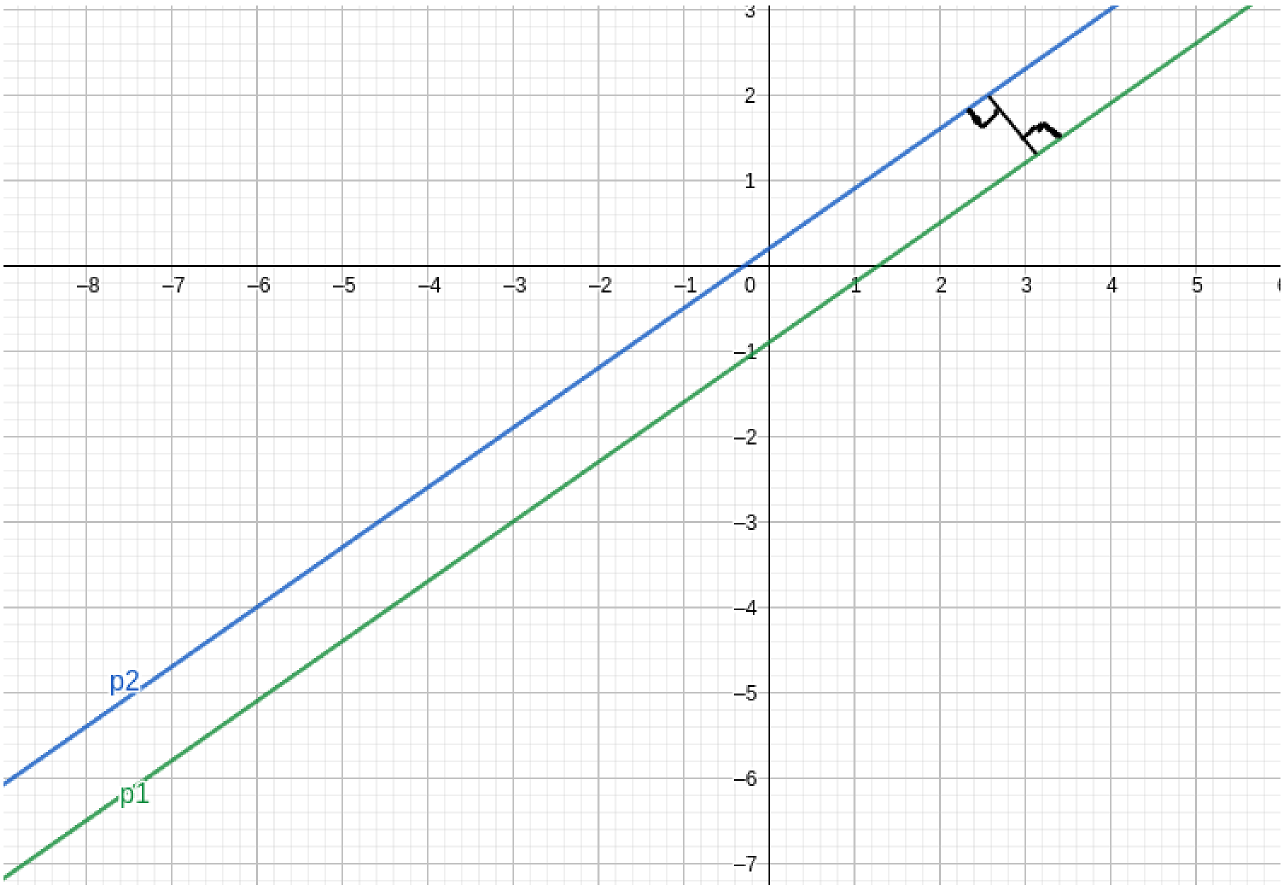
$$\frac{7}{35} = \frac{-10}{-50}$$

Te se zaključuje da su pravci paralelni. Da nisu bili paralelni, njihova udaljenost bi automatski bila 0 jer imaju presjecište. Kako bismo izračunali udaljenost, možemo se poslužiti jednim trikom. To je taj da pronađemo jednu točku na jednom od pravaca, npr. na prvom pravcu. Za x koordinatu prvog pravca uvrstimo 0 i dobijemo:

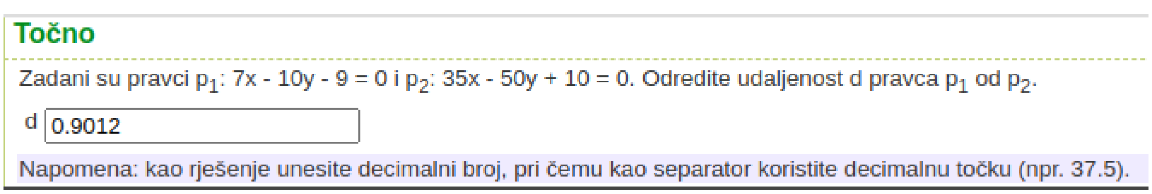
$$-10y = 9$$

$$y = -\frac{9}{10}$$

Te točka $T(0, -\frac{9}{10})$ se nalazi na prvom pravcu. Sad kada imamo točku prvog pravca, uvrstimo ju u normirani oblik jednadžbe drugog pravca i dobijemo udaljenost. Slično kao i u 3.2.10.



Slika 66: Prikaz pravaca u koordinatnom sustavu i najmanje udaljenosti između njih



Točno

Zadani su pravci p_1: $7x - 10y - 9 = 0$ i p_2: $35x - 50y + 10 = 0$. Odredite udaljenost d pravca p_1 od p_2.

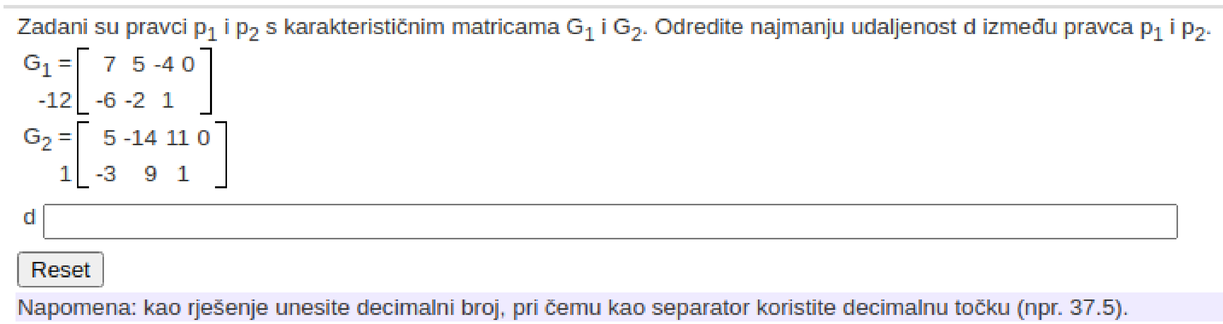
d 0.9012

Napomena: kao rješenje unesite decimalni broj, pri čemu kao separator koristite decimalnu točku (npr. 37.5).

Slika 67: Zadatak riješen

3.2.13 Udaljenost dva pravca - 3D slučaj

Kod 3D slučaja udaljenosti dvaju pravaca, pravci se mogu nalaziti u tri stanja - sjeći se, biti paralelni ili biti mimosmjerni. Udaljenost se računa za paralelne ili mimosmjerne pravce.



Slika 68: Zadatak

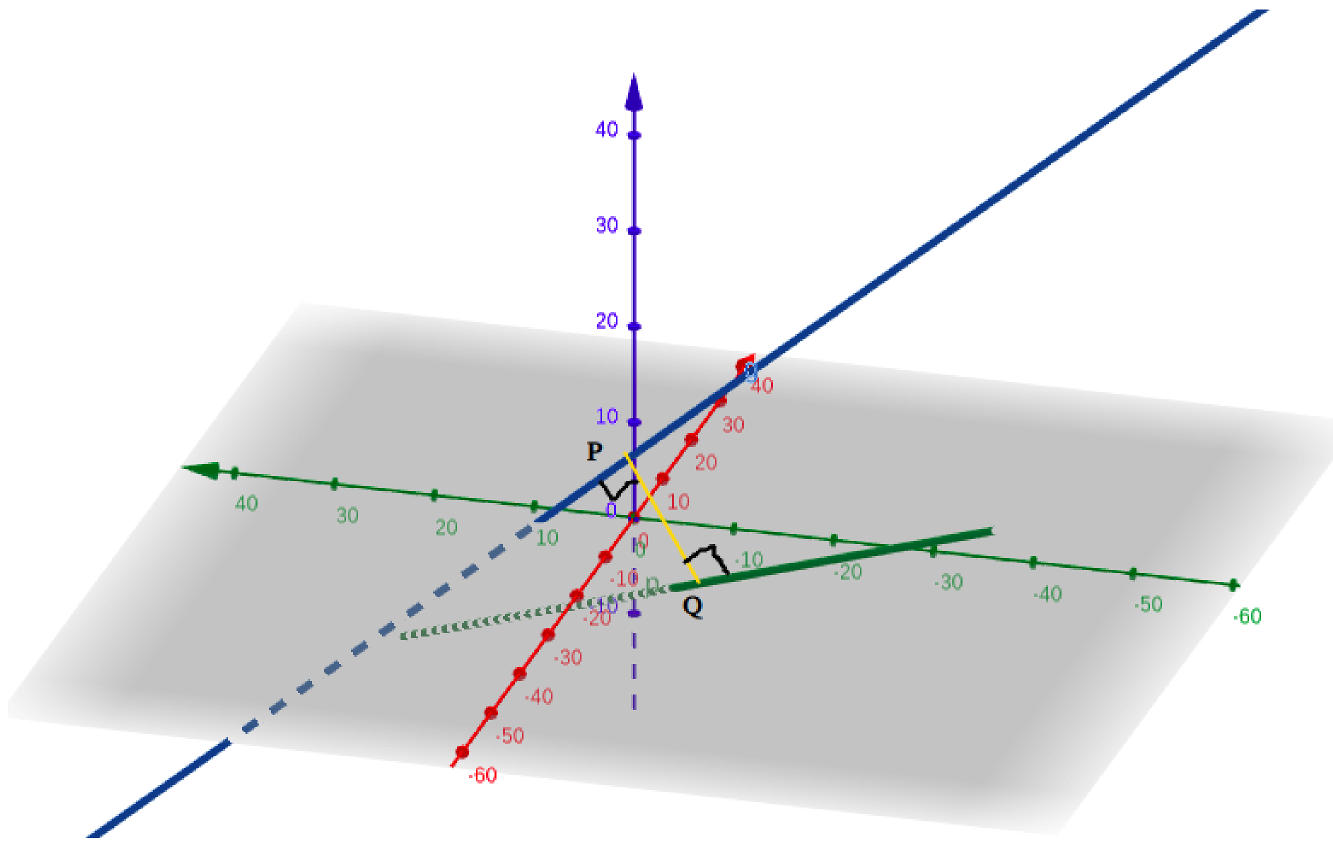
I u ovom zadatku su parametarski oblici jednadžbe pravca čudno zadani, zapravo izgledaju ovako:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -4 & 0 \\ -12 & -6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 5 & -14 & 11 & 0 \\ 1 & -3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Prva stvar je izjednačavanje h koordinata s 1. U ovom zadatku već jesu pa ne treba.

Ovaj zadatak ćemo riješiti preko vektora. Prvo pitanje na koje ćemo odgovoriti je što je najmanja udaljenost između dva pravca u 3D prostoru. Odgovor na to pitanje je dužina koja spaja dvije točke (jedna na jednom pravcu, druga točka na drugom pravcu) i koja je okomita na oba pravca istovremeno. Okomitost u geometriji predstavlja najmanju udaljenost. Na slici bi to izgledalo ovako:



Slika 69: Oba pravca u koordinatnom sustavu i najmanja udaljenost između njih

Pošto zadatak rješavamo pomoću vektora, zamislit ćemo da se na prvom pravcu nalazi točka P odnosno, na drugom pravcu točka Q. Kada spojimo točke P i Q dobit ćemo vektor $\vec{PQ}$ koji je okomit na oba pravca. Točka $P(x, y, z)$ ima koordinate $P(7t-12, 5t-6, -4t-2)$, a točka Q ima koordinate $Q(5s+1, -14s-3, 11s+9)$. Te koordinate su samo raspisan parametarski oblik jednadžbe oba pravca.

Kako smo zadali da najmanja udaljenost između dva pravca je vektor $\vec{PQ}$ koji je okomit na oba pravca, možemo zaključiti kako je skalarni umnožak vektora $\vec{PQ}$ i vektora smjera oba pravca jednak 0.

$$\vec{PQ} \cdot \vec{g_1} = 0$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{g_2} = 0$$

gdje su g_1 i g_2 vektori smjera pravaca.

Dobro je za prisjetiti se što predstavlja parametarski oblik jednadžbe pravca. On se sastoji od vektora smjera pravca i točke kroz koju prolazi. Na ovaj način imamo sve potrebne podatke za rješavanje zadatka.

Vektor $\vec{PQ}$ se dobije:

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_{G_2} - x_{G_1} \\ y_{G_2} - y_{G_1} \\ z_{G_2} - z_{G_1} \end{bmatrix}$$

odnosno:

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} 5s + 1 - (7t - 12) \\ -14s - 3 - (5t - 6) \\ 11s + 9 - (-4t - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s - 7t + 13 \\ -14s - 5t + 3 \\ 11s + 4t + 11 \end{bmatrix}$$

g_1 i g_2 iščitamo iz parametarskog oblika jednadžbe pravaca (gornji redak matrice):

$$g_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Sada rješavamo:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{g_1} = \begin{bmatrix} 5s - 7t + 13 \\ -14s - 5t + 3 \\ 11s + 4t + 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = 0$$

Iz čega dobijemo:

$$35s - 49t + 91 - 70s - 25t + 15 - 44s - 16t - 44 = 0$$

$$-79s - 90t + 62 = 0$$

Odnosno drugi pravac daje:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 5s - 7t + 13 \\ -14s - 5t + 3 \\ 11s + 4t + 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \\ 11 \end{bmatrix} = 0$$

$$342s + 79t + 144 = 0$$

Kada se riješe dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, dobije se:

$$s = -0.7277$$

$$t = 1.3277$$

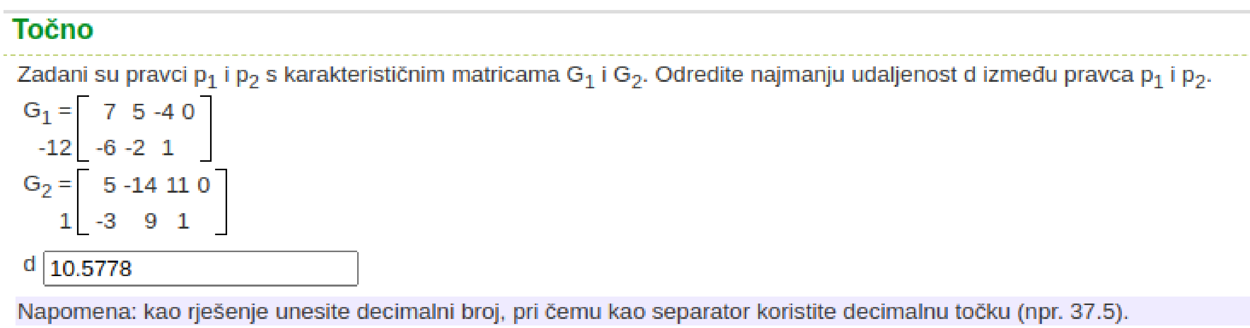
a kako bismo dobili duljinu, dovoljno je izračunati duljinu vektora $\vec{PQ}$.

$$d = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

$$d = \sqrt{(5s - 7t + 13)^2 + (-14s - 5t + 3)^2 + (11s + 4t + 11)^2}$$

Odnosno, kad se uvrste dobiveni s i t, dobije se

$$d = 10.5778$$



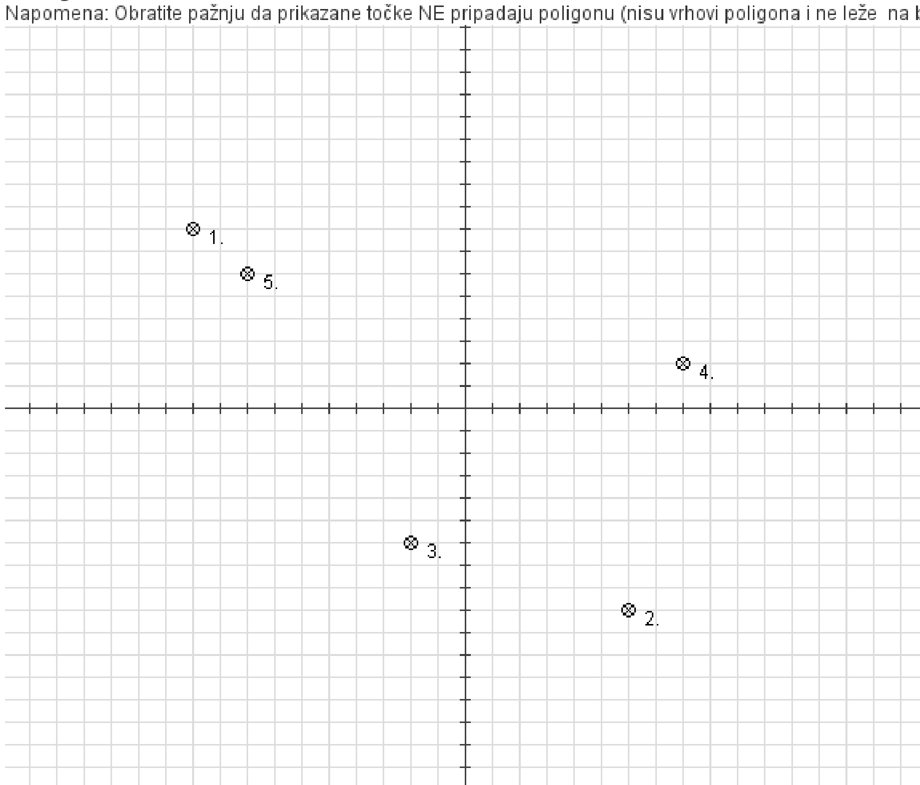
Slika 70: Zadatak riješen

3.2.14 Određivanje poligona za zadani skup točaka i uvjeta

Zamislimo da se krećemo od početne točke brida, do završne točke brida. Sve lijevo od nas je iznad pravca, a sve desno od nas je ispod pravca. Za ovaj zadatak to je jedino bitno.

Za zadane točke nacrtajte poligon čiji će bridovi zadovoljavati uvjete navedene u tablici. Ako poželite zadatak početi rješavati od početka pritisnite desni gumb miša.
Napomena: Obratite pažnju da prikazane točke NE pripadaju poligonu (nisu vrhovi poligona i ne leže na bridovima poligona).

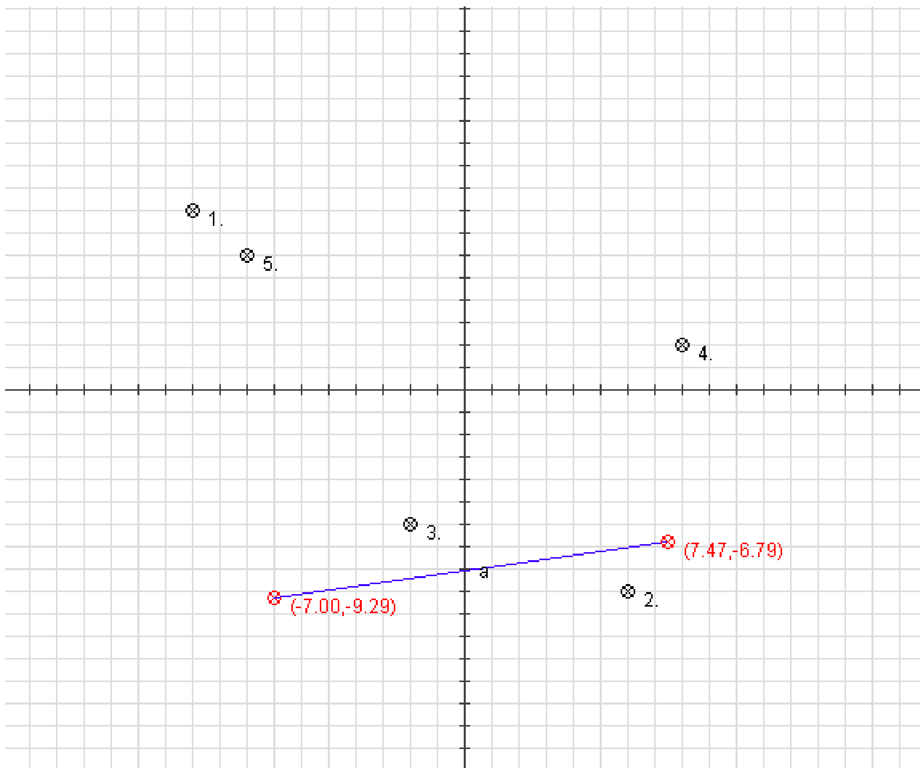
Točka	X	Y
1	-10.0	8.0
2	6.0	-9.0
3	-2.0	-6.0
4	8.0	2.0
5	-8.0	6.0



Brid \ Točka	1	2	3	4	5
a	IZNAD	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD
b	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD	IZNAD
c	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD
d	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD

Slika 71: Zadatak

Ovaj zadatak ima puno rješenja, primjerice, za brid a možemo uzeti za početnu točku $T_1(-7.00, -9.29)$,a za završnu $T_2(7.47, -6.79)$

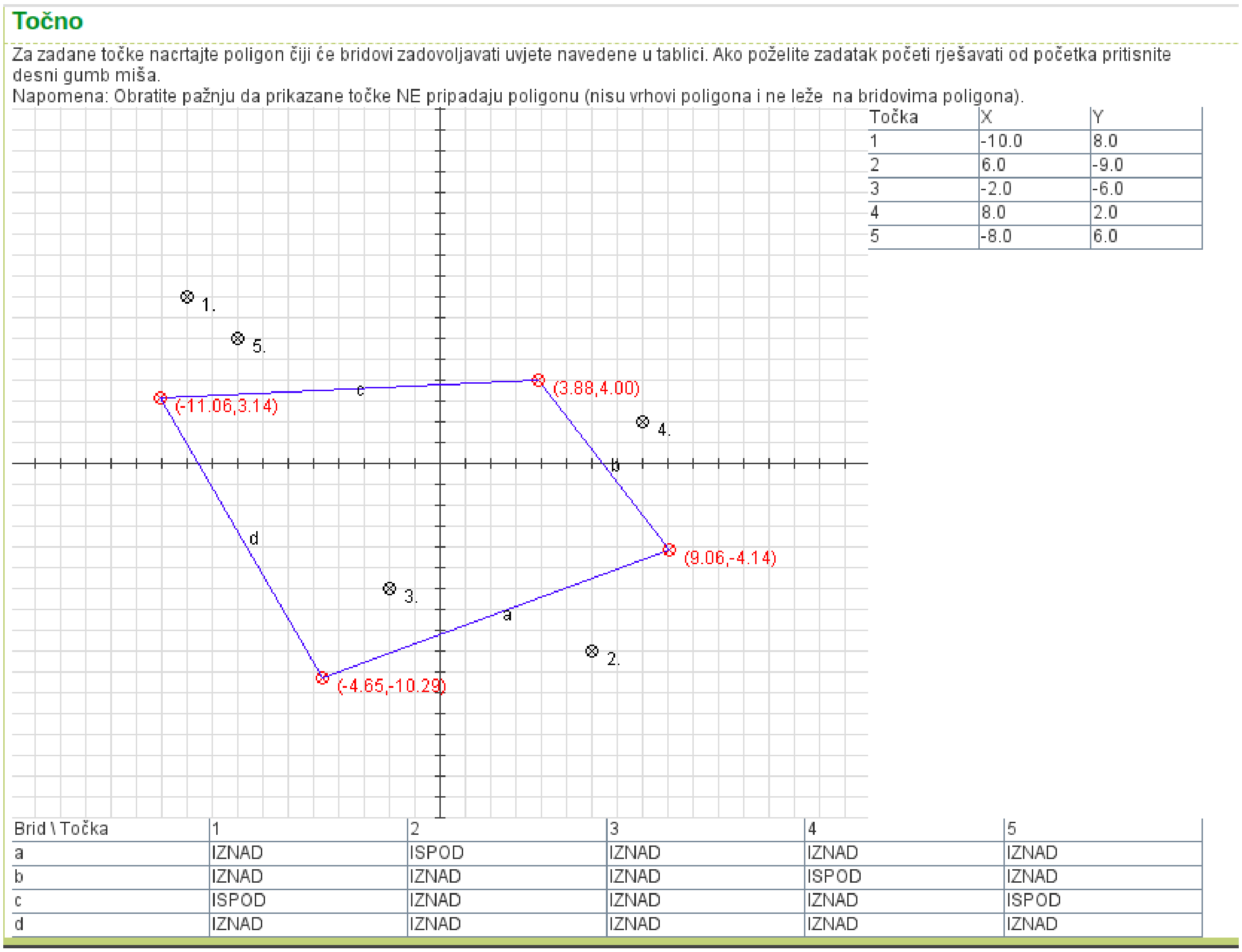


Točka	X	Y
1	-10.0	8.0
2	6.0	-9.0
3	-2.0	-6.0
4	8.0	2.0
5	-8.0	6.0

Brid \ Točka	1	2	3	4	5
a	IZNAD	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD
b	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD	IZNAD
c	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD
d	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD

Slika 72: Brid a koji zadovoljava uvjete dane u tablici

Sve točke su **IZNAD** (lijevo od) brida a, osim točke 2. Konačni poligon bi mogao izgledati:



Točka	X	Y
1	-10.0	8.0
2	6.0	-9.0
3	-2.0	-6.0
4	8.0	2.0
5	-8.0	6.0

Brid \ Točka	1	2	3	4	5
a	IZNAD	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD
b	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD	IZNAD
c	ISPOD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	ISPOD
d	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD	IZNAD

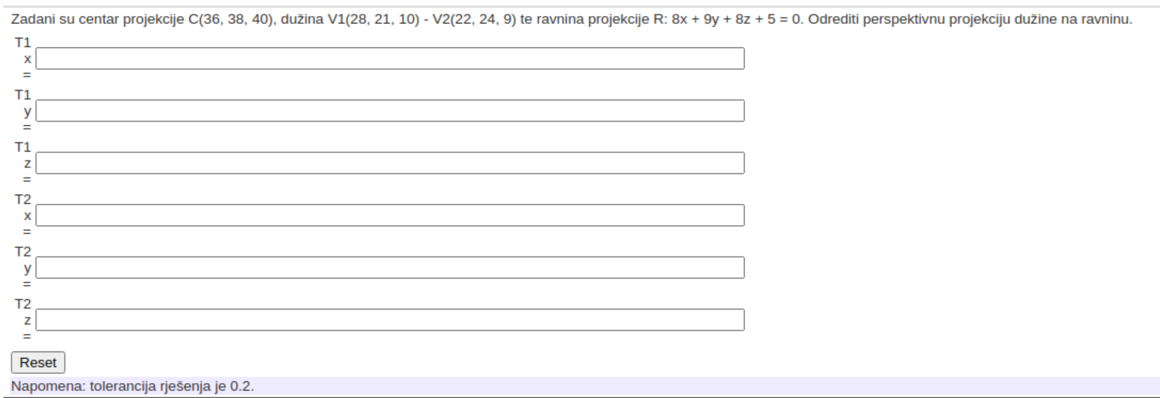
Slika 73: Zadatak riješen

3.3 Transformacija pogleda i projekcije

3.3.1 Projekcija dužine na ravninu

Postoje dvije vrste projekcija koje se obrađuju u kolegiju, paralelna i perspektivna. Više o njima u knjizi na stranici 113.

Za perspektivnu projekciju je dobro za zapamtiti da postoji centar projekcije, tzv. očište iz kojeg se vuku pravci u smjeru objekta te ga ocrtavaju na ravnini. Pogledaj sliku 75.


Zadani su centar projekcije C(36, 38, 40), dužina V1(28, 21, 10) - V2(22, 24, 9) te ravnina projekcije R: 8x + 9y + 8z + 5 = 0. Odrediti perspektivnu projekciju dužine na ravninu.

T1 x =

T1 y =

T1 z =

T2 x =

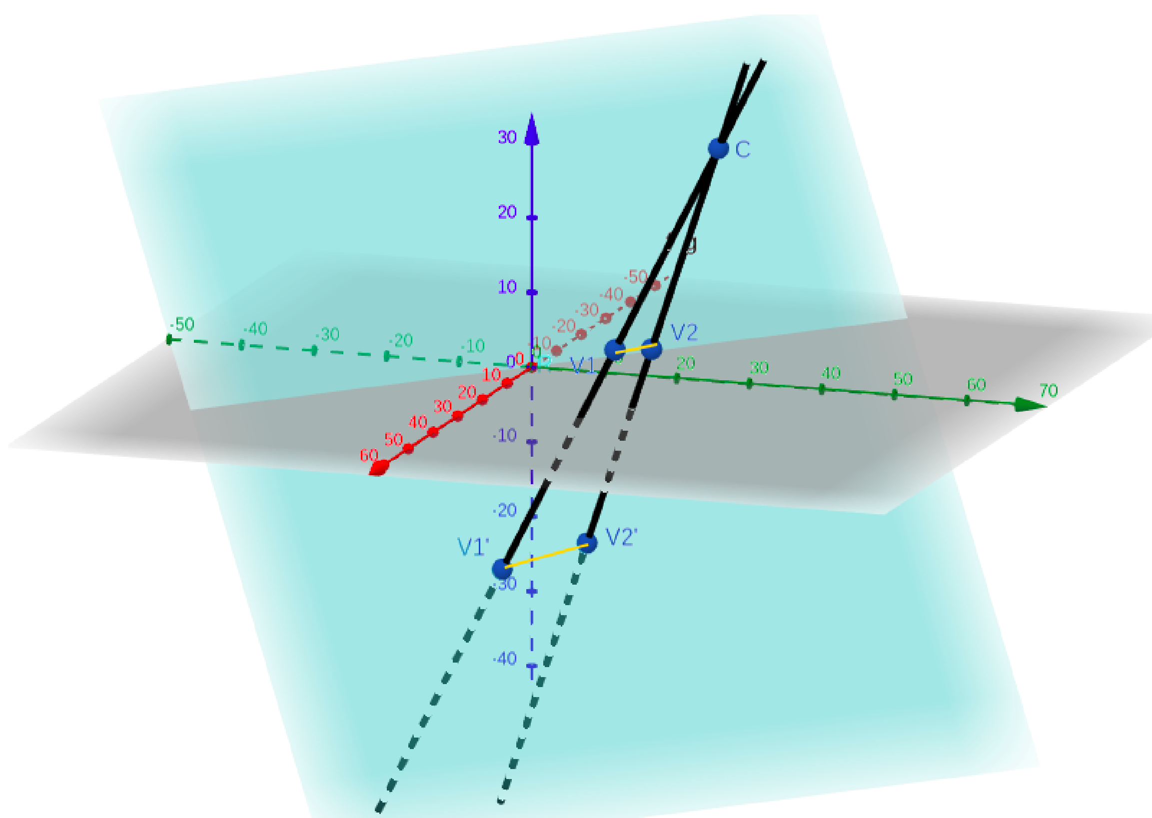
T2 y =

T2 z =

Reset

Napomena: tolerancija rješenja je 0.2.

Slika 74: Zadatak



Slika 75: Prikaz perspektivne projekcije dužine na ravninu

Znači ideja bi bila sljedeća - pronaći sjecišta pravaca na kojima leže dužine CV_1 i CV_2 s ravninom R. Najlakše je pronaći sjecište pravca zadanog u parametarskom obliku i implicitno zadane jednadžbe ravnine (podsjetnik 3.2.8). Jednadžbe pravaca:

$$CV_1 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 & -17 & -30 & 0 \\ 36 & 38 & 40 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CV_2 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -14 & -14 & -31 & 0 \\ 36 & 38 & 40 & 1 \end{bmatrix}$$

Kada uvrstimo x, y i z oba pravca u jednadžbu ravnine, dobije se:

$$t_1 = 2.0897$$

$$t_2 = 1.965$$

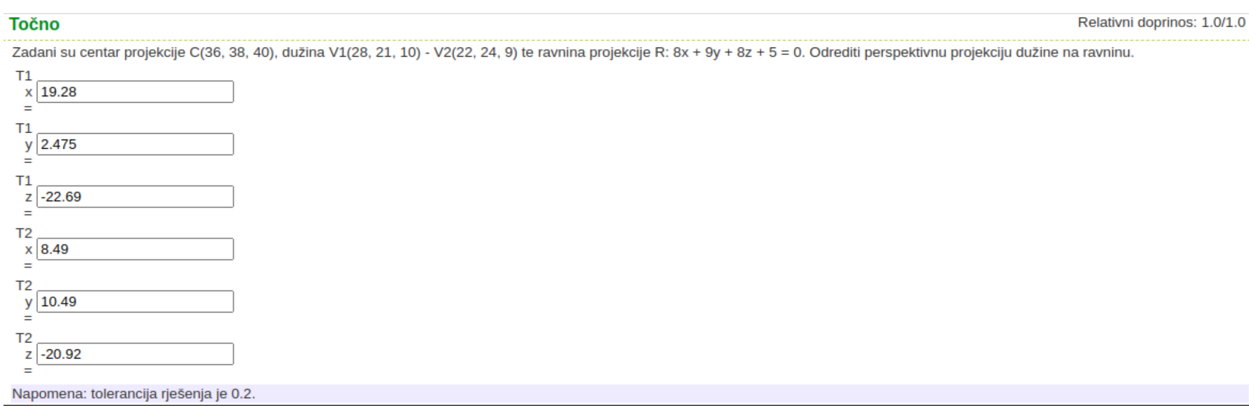
Kada se t-ovi uvrste u jednadžbe pravca, dobije se:

$$x_1 = 19.28 \qquad x_2 = 8.49$$

$$y_1 = 2.475 \qquad y_2 = 10.49$$

$$z_1 = -22.69 \qquad z_2 = -20.92$$

Te to su upravo točke V_1' i V_2'.



Slika 76: Zadatak riješen

3.3.2 Podudaranje dva koordinatna sustava - Jednostavni slučaj

Za ovaj zadatak potrebno je dobro proučiti knjigu od stranice 118. nadalje. Formule koje je dobro znati su:

Translacija

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Rotacija oko x-osi CCW

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ 0 & -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

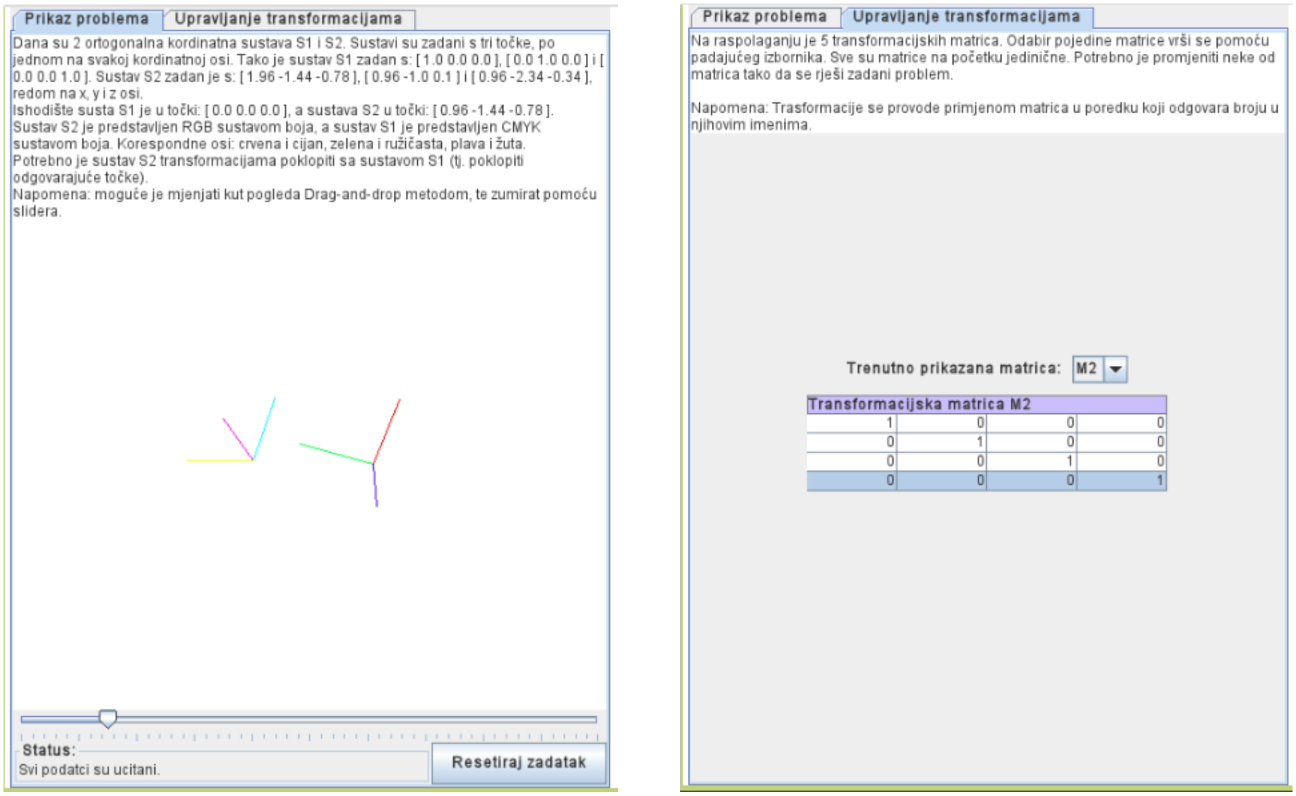
Rotacija oko y-osi CCW

$$R_y = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & -sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin(\beta) & 0 & cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Rotacija oko z-osi CCW

$$R_z = \begin{bmatrix} cos(\gamma) & sin(\gamma) & 0 & 0 \\ -sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Detaljnija objašnjenja će biti prikazana kroz zadatak.

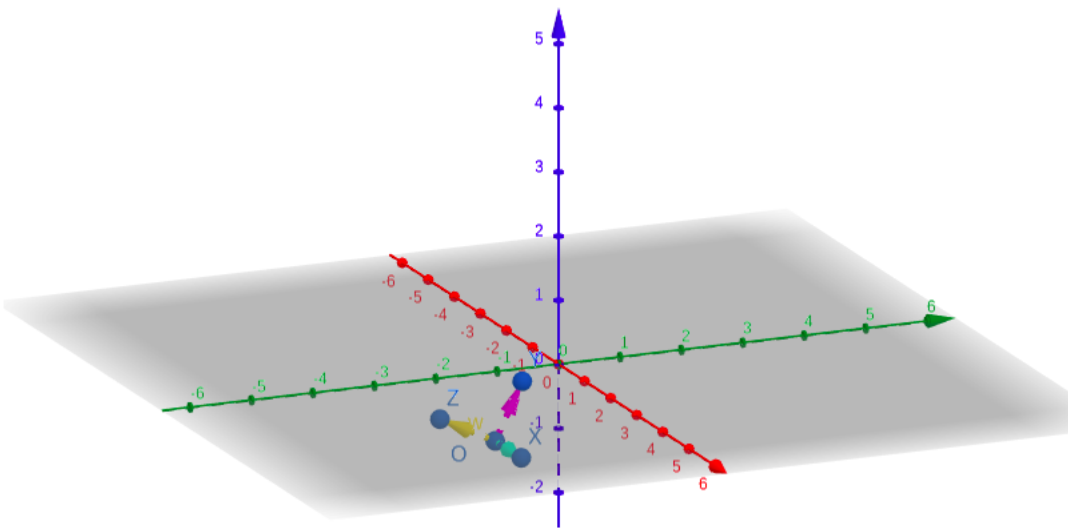


(a) Prikaz problema (b) Upravljanje transformacijama

Slika 77: Zadatak

Preporuka je kod ovakvih zadataka raditi vjerodostojne skice koordinatnih sustava, kako nikako ne bi došlo do pogrešnog rezultata.

U malo ljepšem koordinatnom sustavu to bi izgledalo (samo u ovom slučaju su zamijenjene boje - CMYK je sustav nad kojim radimo transformacije):



Slika 78: Ljepši prikaz

Kao i u 2D slučaju, prva stvar koju je potrebno napraviti je podudariti ishodišta zadanih koordinatnih sustava. Nad RGB koordinatnim sustavom se rade transformacije u **zadatku**. To znači da će se ishodište tog sustava poklopiti sa CMYK

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.96 & 1.44 & 0.78 & 1 \end{bmatrix}$$

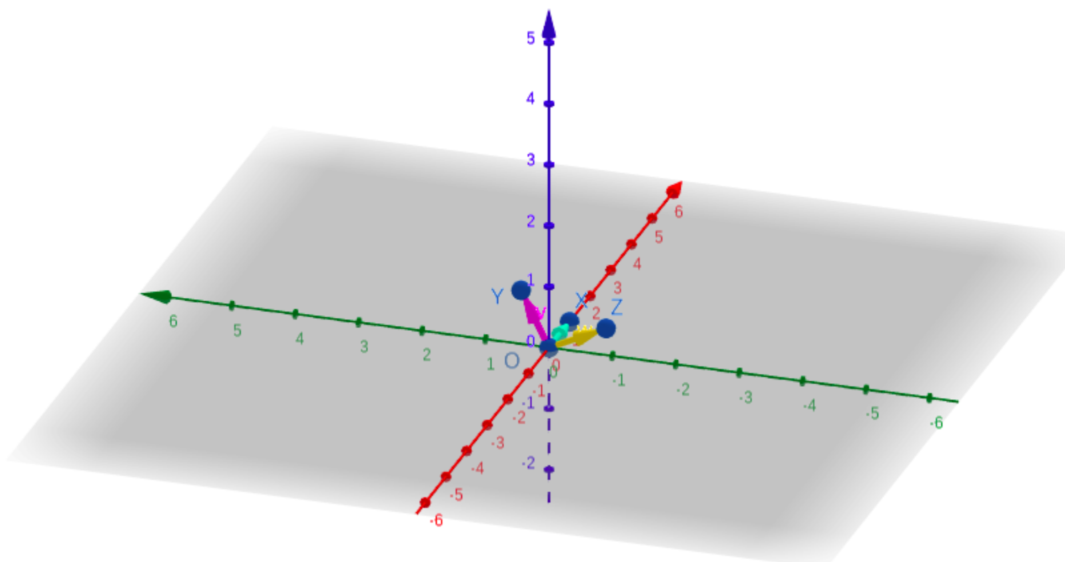
Nakon provedene translacije mijenjaju se osi

$$x = [1, 0, 0]$$

$$y = [0, 0.44, 0.88]$$

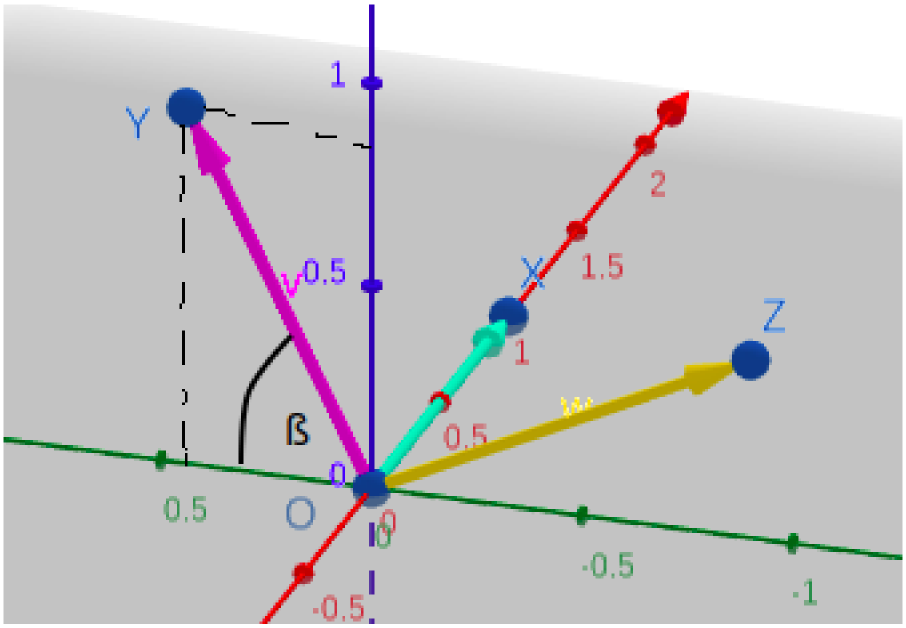
$$z = [0, -0.9, 0.44]$$

A na slici bi to izgledalo



Slika 79: Prikaz nakon translacije

Na slici 79 je vidljivo da su se x-osi već podudarile, sada je potrebno odrediti kut pod kojim je potrebno zarotirati oko x-osi kako bi se poklopile i preostale osi. Promotrimo y-os sustava koji transformiramo i točku Y koja ima koordinate $Y(0, 0.44, 0.88)$



Slika 80: Uvećan prikaz translatiranog koordinatnog sustava

Kako bismo izračunali kut β možemo se poslužiti Pitagorinim poučkom i definicijom kosinusa

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{44}$$

$$sin(\beta) = \frac{nasuprotna \quad kateta}{hipotenuza} \tag{45}$$

$$cos(\beta) = \frac{prilezeca \quad kateta}{hipotenuza} \tag{46}$$

Sada sa slike 80 je vidljivo da je

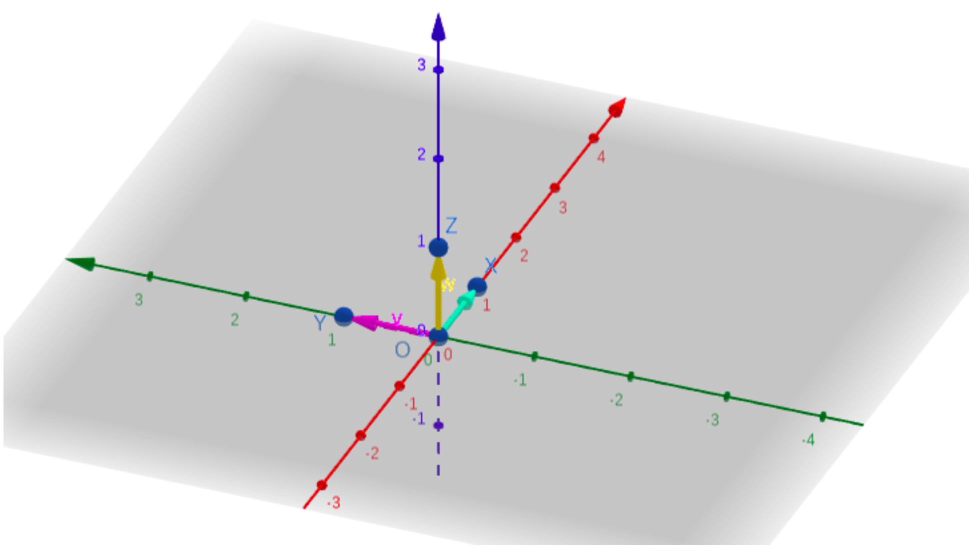
$$cos(\beta) = \frac{y_Y}{\sqrt{y_Y^2 + z_Y^2}} = \frac{0.44}{\sqrt{0.44^2 + 0.88^2}} = 0.4472$$

$$sin(\beta) = \frac{z_Y}{\sqrt{y_Y^2 + z_Y^2}} = \frac{0.88}{\sqrt{0.44^2 + 0.88^2}} = 0.8944$$

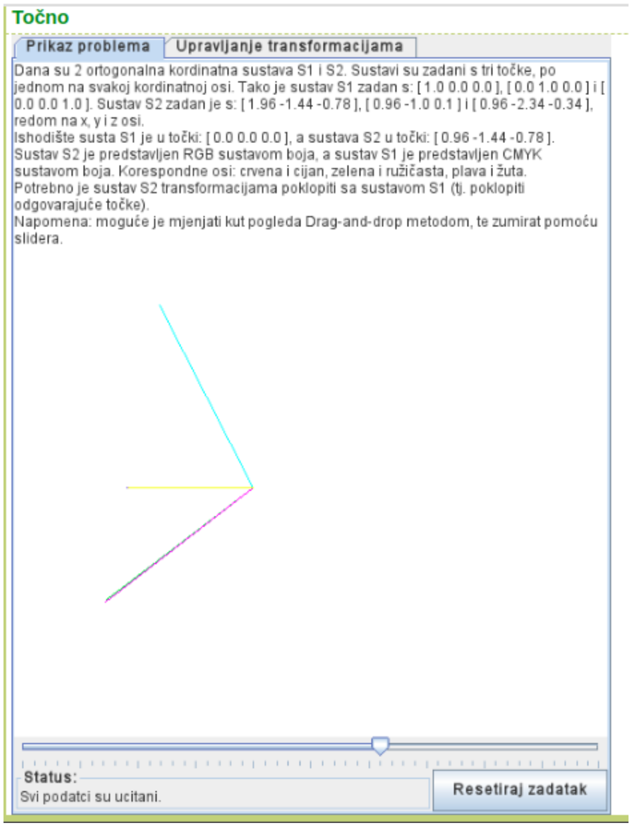
Da bi se y-osi poklopile, potrebno je rotirati za kut β u smjeru suprotnom od kazaljke na satu oko x-osi (formula 41):

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4472 & -0.8944 & 0 \\ 0 & 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

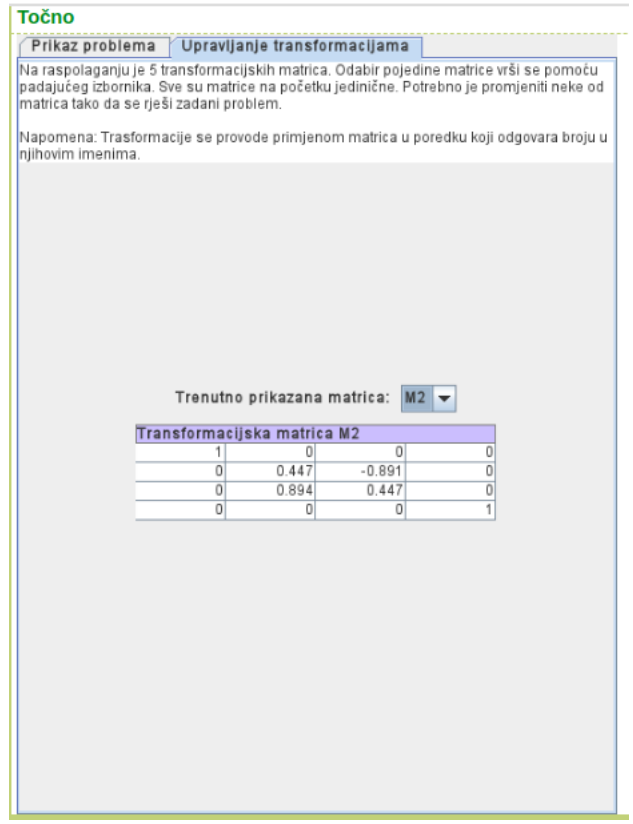
Kada bismo svaku od početnih točaka preko kojih je zadan RGB sustav pomnožili s matricom T pa s matricom R, dobili bismo poklopljene koordinatne sustave. Time je zadatak riješen, tj. to su dvije matrice koje je potrebno upisati u zadatak.



Slika 81: Prikaz nakon obje transformacije



(a) Prikaz problema

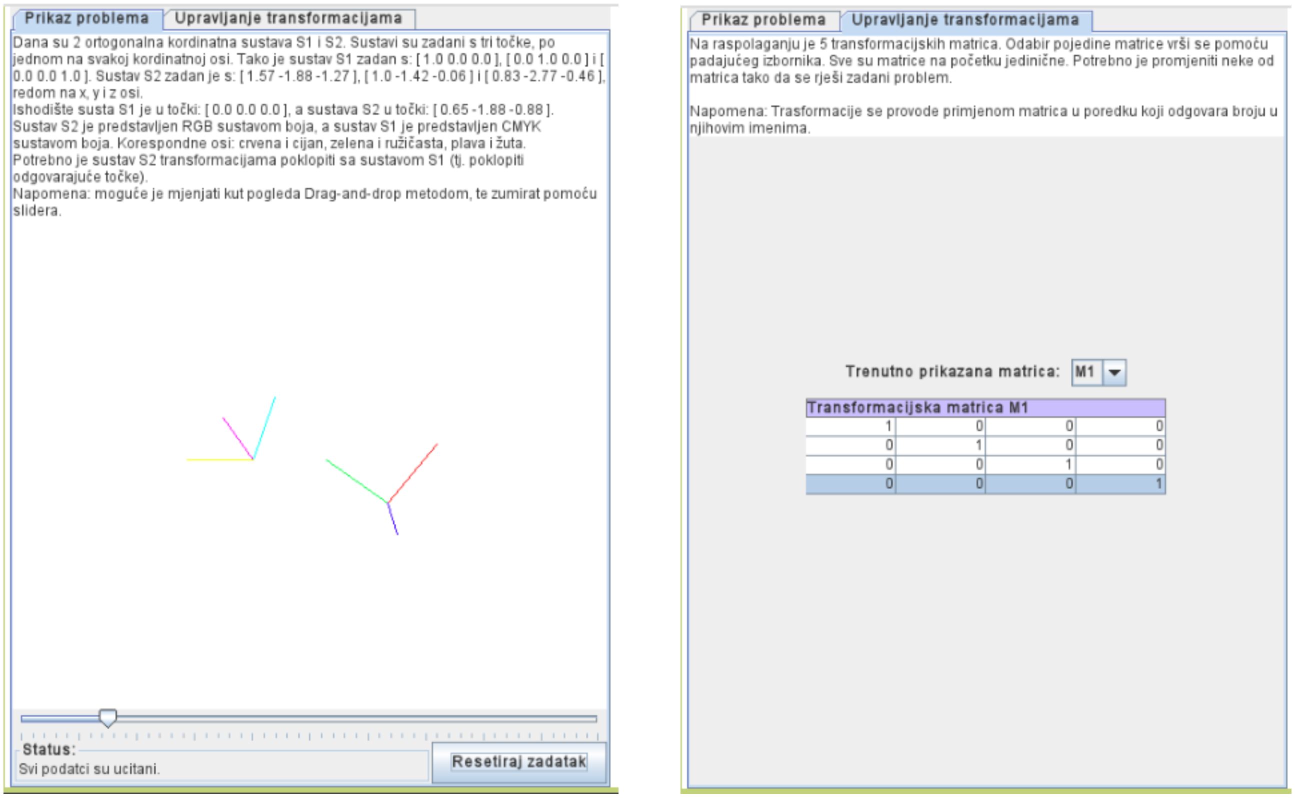


(b) Upravljanje transformacijama

Slika 82: Zadatak riješen

3.3.3 Podudaranje dva koordinatna sustava - Složeniji slučaj

Kod ovog zadatka će se koristiti dosta formula iz prethodnog potpoglavlja 3.3.2. Osim toga, koncept rješavanja je dosta sličan kao u prethodnom potpoglavlju. Jako je bitno koristiti skice, jer je na taj način najlakše odrediti za koje kutove treba rotirati.



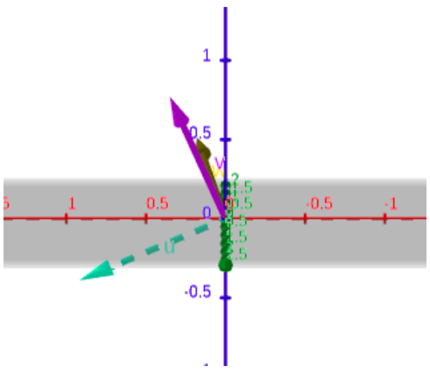
(a) Prikaz problema (b) Upravljanje transformacijama

Slika 83: Zadatak

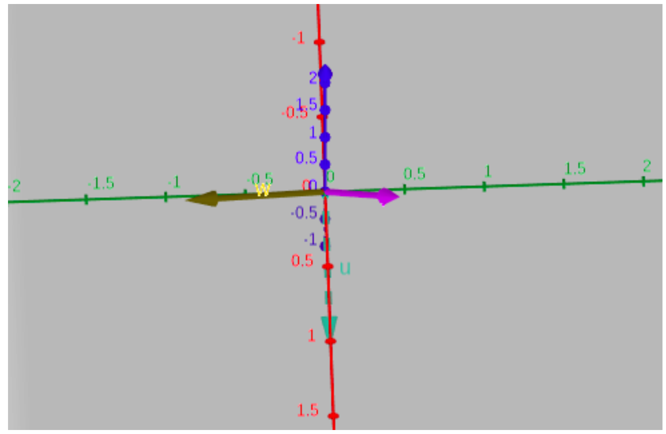
Kao i u prethodnom zadatku, prvo će se koordinatni sustavi poklopiti u ishodištu:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.65 & 1.88 & 0.88 & 1 \end{bmatrix}$$

Nakon što su sustavi poklopljeni u ishodištu, sljedeći korak je pogledati poklapaju li se koje od osi. Ako se ne poklapaju, potrebno ih je poklopiti.



(a) Sustavi nakon translacije u ishodište



(b) Prikaz kako x-os sustava leži u xz ravnini (y=0)

Slika 84: Ljepši prikaz

Na slikama 84 je CMYK sustav sustav nad kojim vršimo transformacije. (x-osi -> crvena i cijan, y-osi -> zelena i magenta i z-osi -> plava i žuta)

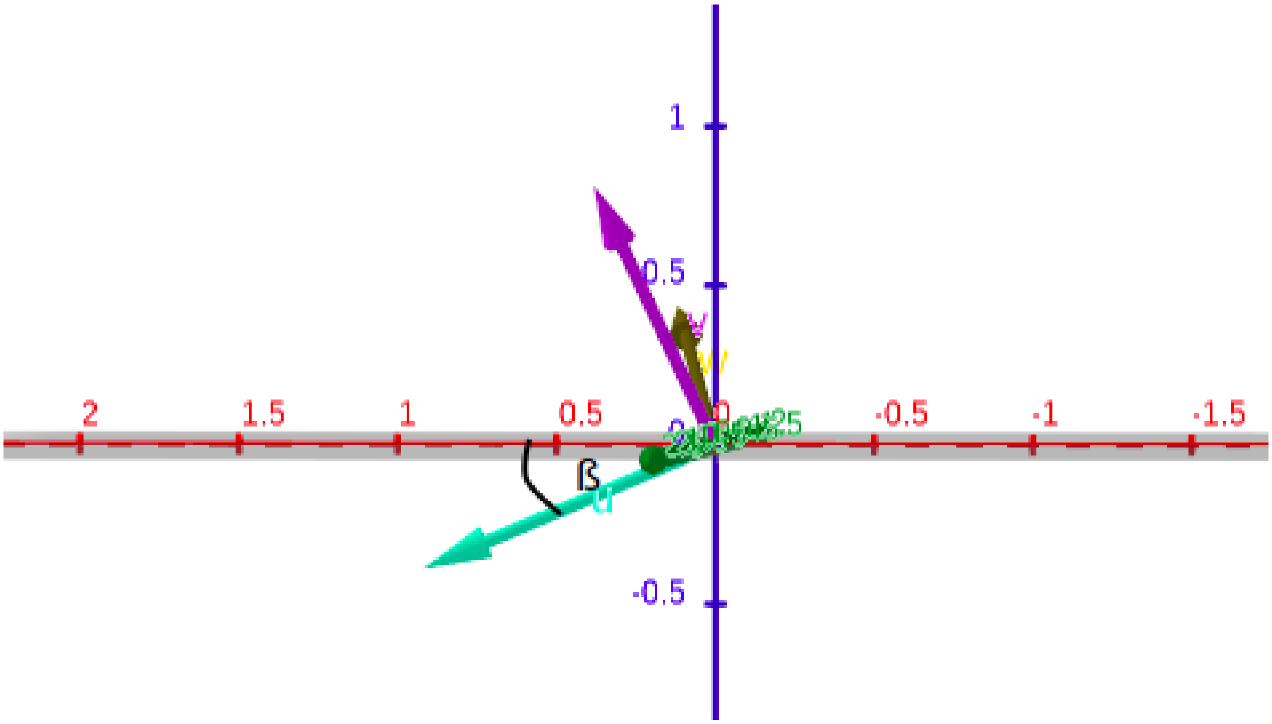
Nakon translacije $(x \cdot T)$, nove vrijednosti točaka sustava koji transformiramo su:

$$x' = [0.92, 0, -0.39]$$

$$y' = [0.35, 0.46, 0.82]$$

$$z' = [0.18, -0.89, 0.42]$$

Sa slike 84 b) je vidljivo kako x-os već leži u ravnini xz pa ćemo od nje krenuti s matricama rotacije.



Slika 85: Odabir kuta rotacije

Cijan os je x-os sustava koji je potrebno rotirati. Sa slike 85 je vidljivo da ju treba rotirati "prema gore" za kut β, odnosno u smjeru CW oko y-osi. U pomoć opet dolaze definicije kuta preko sinusa i kosinusa te Pitagorin poučak. Odnosno

$$cos(\beta) = \frac{|x'_x|}{\sqrt{x'^2_x + x'^2_z}} = \frac{|0.92|}{\sqrt{0.92^2 + 0.39^2}}$$

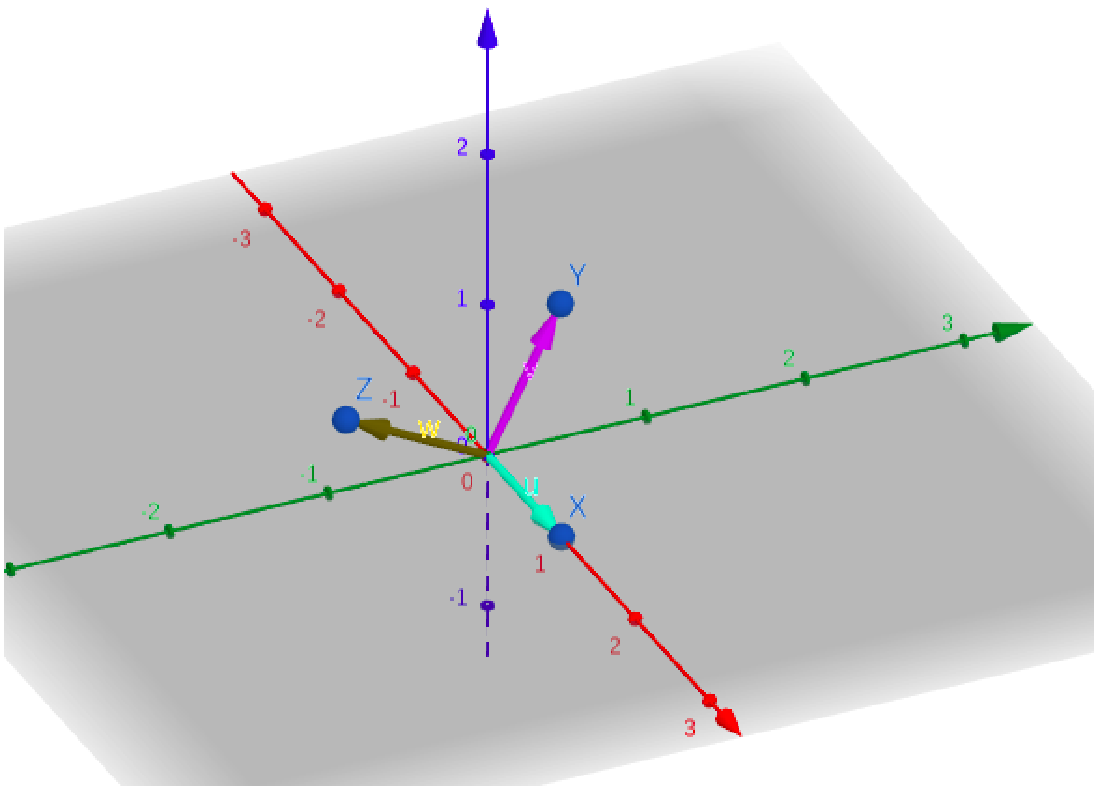
$$sin(\beta) = \frac{|x'_z|}{\sqrt{x'^2_x + x'^2_z}} = \frac{|-0.39|}{\sqrt{0.92^2 + 0.39^2}}$$

Ovdje je bitno za primijetiti da je x'_z zapravo -0.39, ali pošto rotiramo u CW, bitno je da negativnu vrijednost sinusa kuta postavimo u treći redak i prvi stupac kako bismo zadovoljili rotaciju u CW smjeru:

$$R_y = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9206 & 0 & 0.3903 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.3903 & 0 & 0.9206 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada kada početne točke sustava pomnožimo s obje dobivene matrice, nove



Slika 86: Sustav nakon rotacije oko y-osi

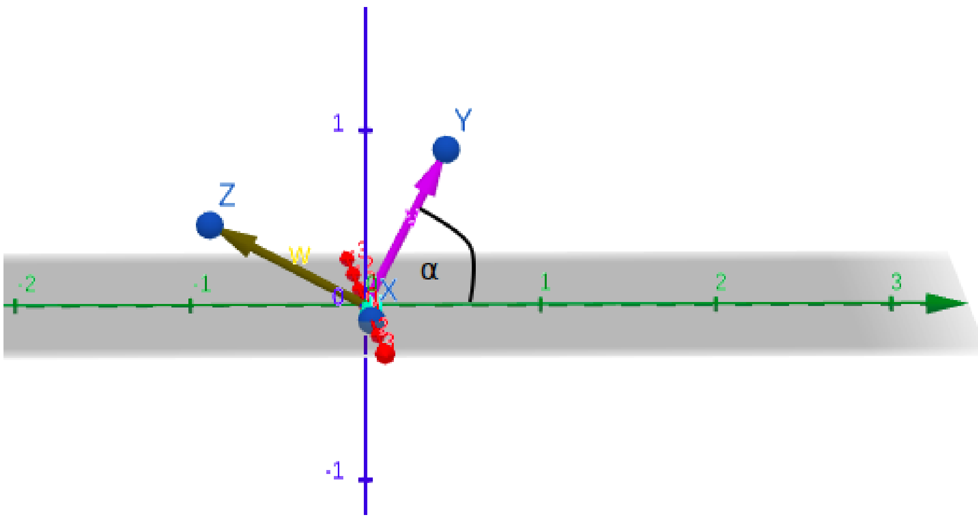
točke glase:

$$x'' = [1, 0, 0]$$

$$y'' = [0, 0.46, 0.89]$$

$$z'' = [0, -0.89, 0.46]$$

Sada sve osi leže u ravninama te ih je još jednom rotacijom potrebno poklopiti. Možemo, primjerice, rotirati oko x-osi u smjeru CW za kut α. Slika:



Slika 87: Odabir kuta druge rotacije

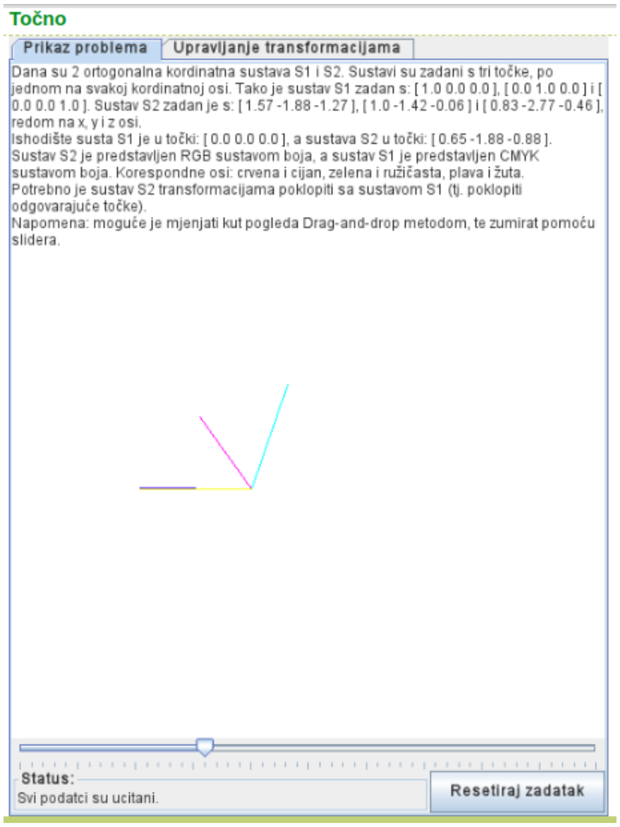
Opet, uz pomoć Pitagorinog poučka i definicije sinusa i kosinusa kuta:

$$cos(\alpha) = \frac{|0.46|}{\sqrt{0.46^2 + 0.89^2}}$$

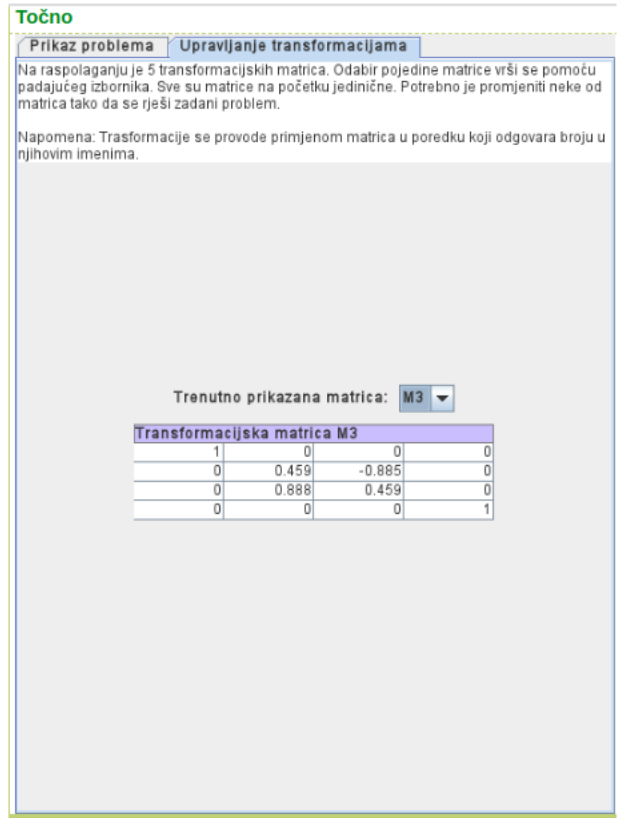
$$sin(\alpha) = \frac{|0.89|}{\sqrt{0.46^2 + 0.89^2}}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4591 & -0.8883 & 0 \\ 0 & 0.8883 & 0.4591 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Te su to tri matrice koje je potrebno iskoristiti kako bi se sustavi poklopili.



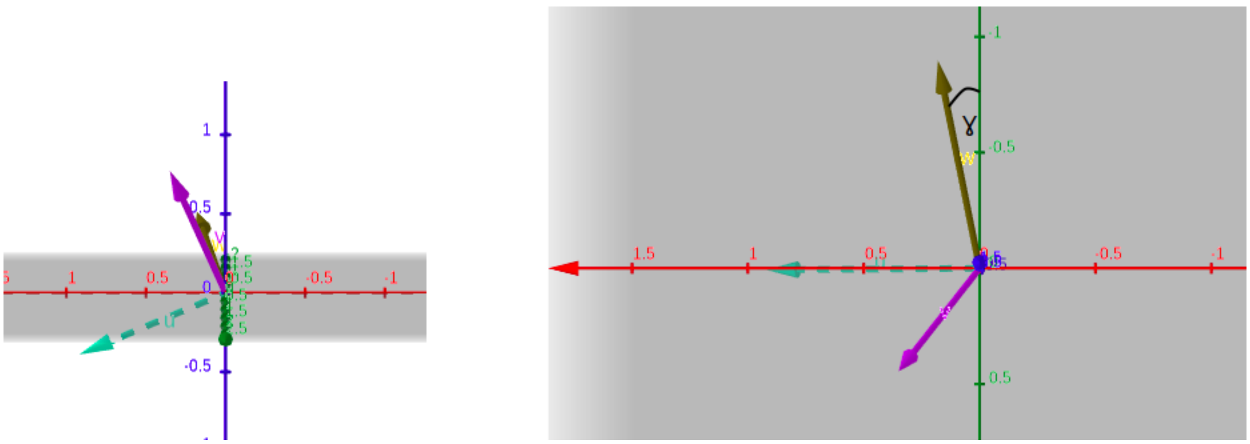
(a) Prikaz problema



(b) Upravljanje transformacijama

Slika 88: Zadatak

Dodatno se u ovom zadatku može pojaviti da niti jedna od osi ne leži niti u jednoj od ravnina. Tada je potrebno prvo jednu od osi zarotirati u pripadajuću ravninu pa onda nastaviti s rješavanjem zadatka. Na primjer, kada bismo u ovom zadatku prvo z-os postavili u yz ravninu. Znači, rotirali



(a) Sustavi nakon translacije u ishodište

(b) Kut za koji bismo rotirali z-os kako bi legla u yz ravninu

Slika 89: Ljepši prikaz

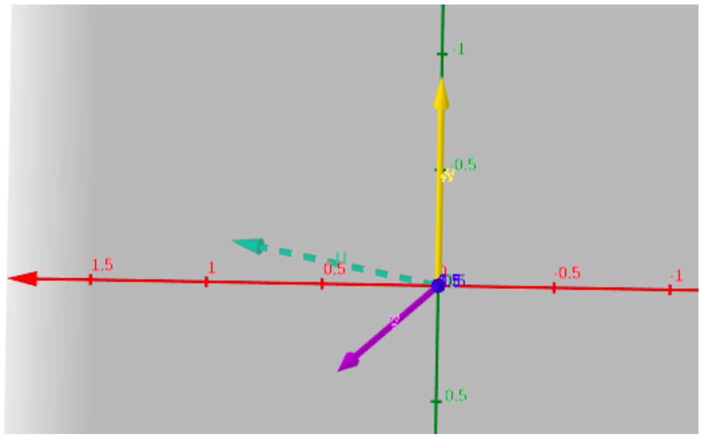
bismo za kut γ u smjeru kazaljke na satu oko z-osi. Žuto je z-os nakon translacije u ishodište, znači promatramo točku $z' = [0.18, -0.89, 0.42]$

$$cos(\gamma) = \frac{|-0.89|}{\sqrt{0.18^2 + 0.89^2}}$$

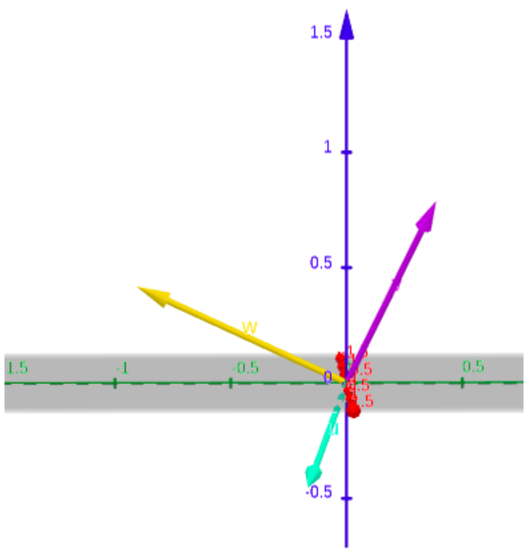
$$sin(\gamma) = \frac{|0.18|}{\sqrt{0.18^2 + 0.89^2}}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} 0.9802 & -0.1982 & 0 & 0 \\ 0.1982 & 0.9802 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odnosno na slici bi to sad izgledalo:



(a) Nakon rotacije oko R_z



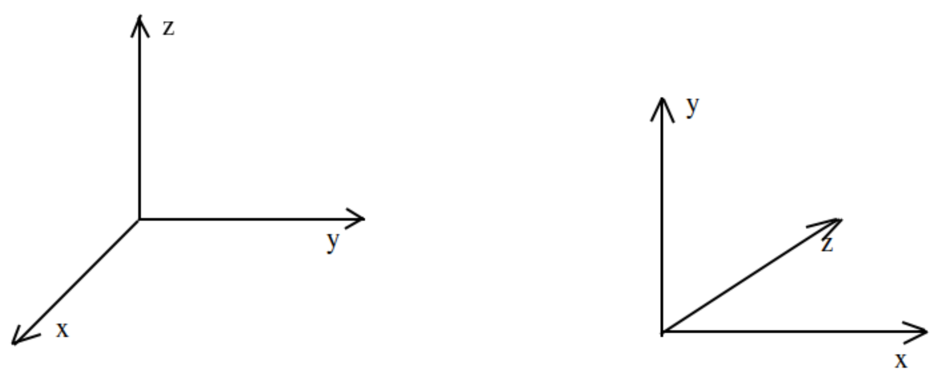
(b) Nakon rotacije oko R_z

Slika 90: Ljepši prikaz

3.3.4 View-up vektor

Prvo treba znati što je View-up vektor. To je vektor koji nam govori koji je smjer prema gore. Točnije, označava smjer y-osi. Kako view-up vektor uglavnom zadaje korisnik, on ne mora uvijek biti točno zadan, nego aproksimativno. Stoga, točan smjer y-osi se određuje uz pomoć vektorskog umnoška što će biti prikazano kroz zadatak. Za dodatna objašnjenja posjetiti knjigu od stranice 128.

Nadalje, treba razlikovati lijevi i desni koordinatni sustav:



(a) Desni koordinatni sustav (b) Lijevi koordinatni sustav

Slika 91: Koordinatni sustavi

Po pravilu desne ruke za vektorski umnožak se dobije - Desni koordinatni sustav:

$$x = y \times z$$

$$y = z \times x$$

$$z = x \times y$$

Način na koji je ovo moguće lako zapamtiti je sljedeći... Uzmimo xyz ($x = y \times z$) i kružno zarotirajmo, dobijemo zxy ($z = x \times y$), itd...
Lijevi koordinatni sustav:

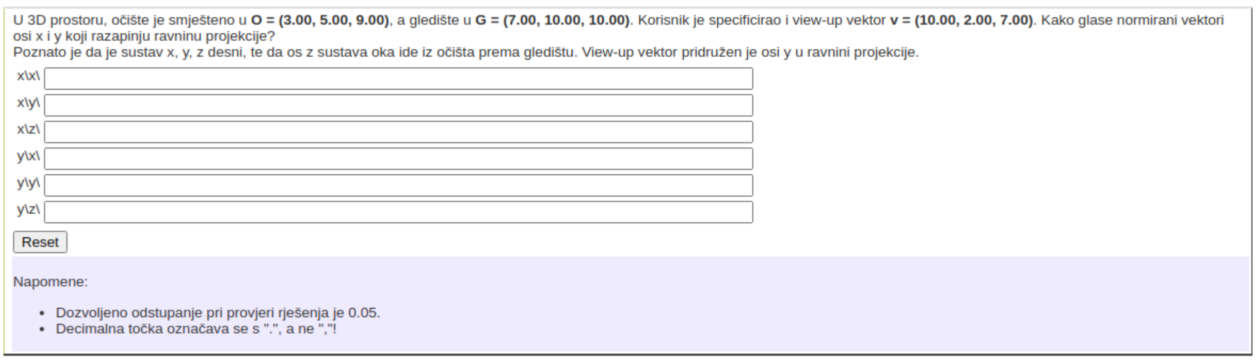
$$x = z \times y$$

$$y = x \times z$$

$$z = y \times x$$

Lijevi koordinatni sustav je samo obrnut od desnog.

Nadalje, treba razlikovati očište i gledište.
Očište -> odakle gledamo
Gledište -> u što gledamo
Ravnina projekcije je ravnina okomita na vektor očište-gledište te točka gledišta leži u toj ravnini. Znači, vektor očište-gledište je normala projekcijske ravnine (lako za dobiti parametarski oblik ravnine 3.2.3).


U 3D prostoru, očište je smješteno u **O = (3.00, 5.00, 9.00)**, a gledište u **G = (7.00, 10.00, 10.00)**. Korisnik je specificirao i view-up vektor **v = (10.00, 2.00, 7.00)**. Kako glase normirani vektori osi x i y koji razapinju ravninu projekcije?
Poznato je da je sustav x, y, z desni, te da os z sustava oka ide iz očišta prema gledištu. View-up vektor pridružen je osi y u ravnini projekcije.

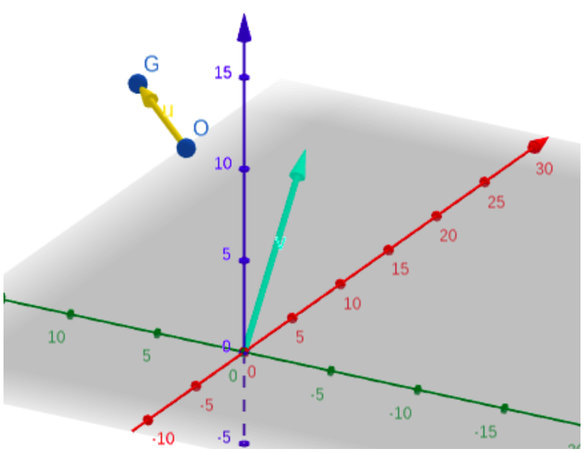
x\x\
x\y\
x\z\
y\x\
y\y\
y\z\

Reset

Napomene:

- Dozvoljeno odstupanje pri provjeri rješenja je 0.05.
- Decimalna točka označava se s ".", a ne ","!

Slika 92: Zadatak



Slika 93: Prikaz view-up vektora i vektora očište-gledište u koordinatnom sustavu

Sa slike 93 je vidljivo da vektori očište-gledište i view-up nisu nikako pod pravim kutom. Odnosno, vektor view-up može biti aproksimativno zadan.

U ovakvim zadacima je bitno za napomenuti da je vektor očište-gledište predstavljen kao konkretna z-os, a view-up kao aproksimativna y-os.

Imamo te dvije osi, treću, x-os možemo dobiti preko vektorskog umnoška (jer vektorski umnožak daje vektor okomit na oba vektora). Ako u obzir uzmemo da je ovo desni koordinanti sustav, x-os glasi:

$$x = y \times z = view - up \times \vec{OG} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 18 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Sada kada imamo x-os možemo izračunati pravu vrijednost y-osi opet vektorskim umnoškom:

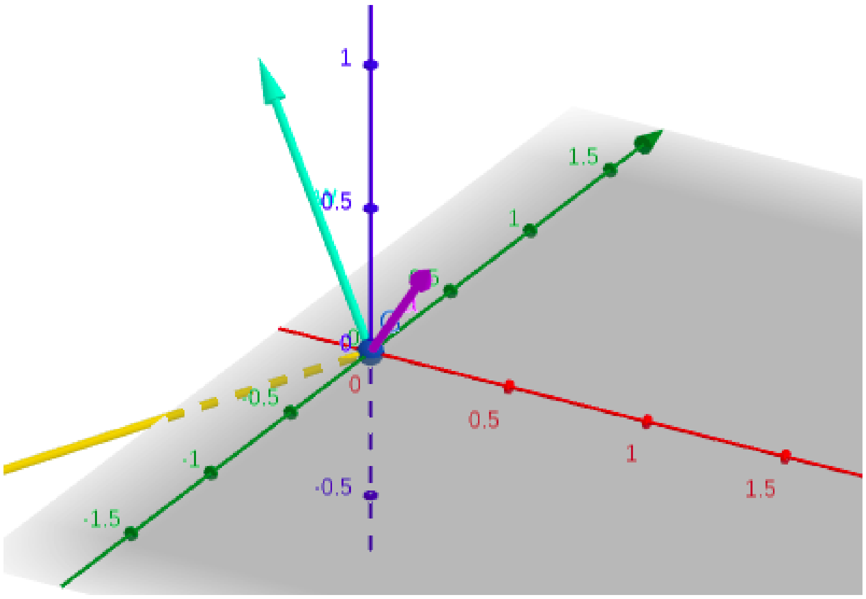
$$y = z \times x = \vec{OG} \times x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -33 \\ 18 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 192 \\ -201 \\ 237 \end{bmatrix}$$

Nakon toga normiramo x i y osi

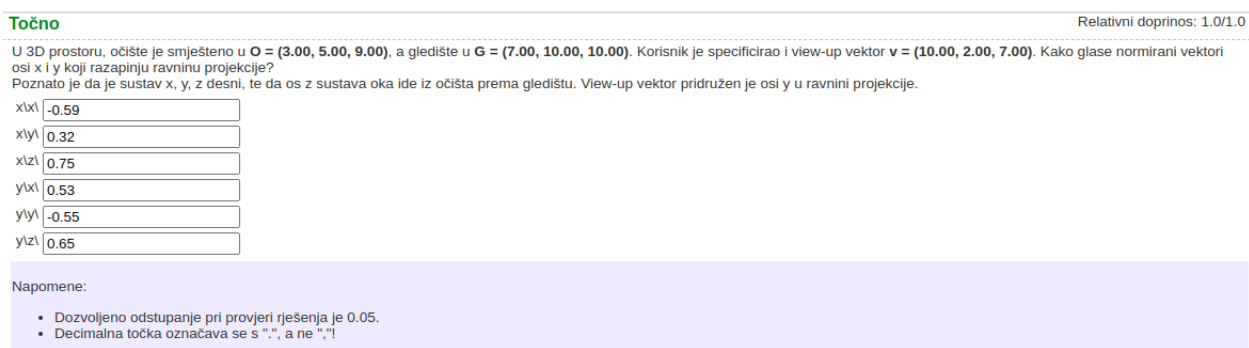
$$\frac{\vec{x}}{|x|} = \frac{-33i + 18j + 42k}{\sqrt{(-33)^2 + 18^2 + 42^2}} = -0.59i + 0.32j + 0.75k = \begin{bmatrix} -0.59 \\ 0.32 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\vec{y}}{|y|} = \begin{bmatrix} 0.53 \\ -0.55 \\ 0.65 \end{bmatrix}$$

I to su konačna rješenja zadatka.



Slika 94: Konačni koordinatni sustav koji se dobije kad se vektor očište-gledište translatira u ishodište te okrene mu se smjer (cijan - x-os, magenta - y i žuta - z-os)



Točno

Relativni doprinos: 1.0/1.0

U 3D prostoru, očište je smješteno u **O = (3.00, 5.00, 9.00)**, a gledište u **G = (7.00, 10.00, 10.00)**. Korisnik je specificirao i view-up vektor **v = (10.00, 2.00, 7.00)**. Kako glase normirani vektori osi x i y koji razapinju ravninu projekcije?
Poznato je da je sustav x, y, z desni, te da os z sustava oka ide iz očišta prema gledištu. View-up vektor pridružen je osi y u ravnini projekcije.

x\x\ -0.59
x\y\ 0.32
x\z\ 0.75
y\x\ 0.53
y\y\ -0.55
y\z\ 0.65

Napomene:

- Dozvoljeno odstupanje pri provjeri rješenja je 0.05.
- Decimalna točka označava se s ".", a ne ","!

Slika 95: Zadatak riješen

4 Rasterska grafika

4.1 Bresenhamov postupak

Za detaljniji opis Bresenhamovog algoritma posjetiti knjigu od stranice 69.

Pseudokod algoritma:

```
//U zadatku se koristi sljedeca verzija pseudokoda
//(koja je podlozna malim modifikacijama ovisno o
//polozaju tocaka):
void bresenham_nacrtaj(int xs, int ys, int xe, int ye){
        //ovdje se vrsi zamjena koordinata
        int x, yc;
        double a, yf;
        a=(ye-ys)/(double)(xe-ye);
        yc=ys; yf=-0.5;

        for(x = xs; x <= xe ;x++ ){
                osvijetli_pixel(x, yc);
                // ili osvijetli_pixel(yc, x) ako je izvrsena
                //zamjena koordinata
                yf=yf+a;
                if(yf >= 0.){
                        yf=yf-1.0;
                        yc=yc+1;
                }
        }
}
```

gdje slovo D predstavlja yf. **Treba paziti odnos točaka T_0 i T_1**, tj. hoće li se koristiti $y_c = y_c + 1.0$ ili $y_c = y_c - 1.0$ te hoće li se vršiti zamjena koordinata točaka te treba li a pomnožiti s -1. Uglavnom, a treba uvijek biti pozitivan i između 0 i 1, a ako je pravac usmjeren prema dolje, y_c treba umanjivati za 1 te ako je kut između $-45°$ i $45°$ ne treba mijenjati koordinate (ako nije između ta dva kuta,onda treba). Ako su kutevi između $45°$ i $90°$ onda je zamjena:

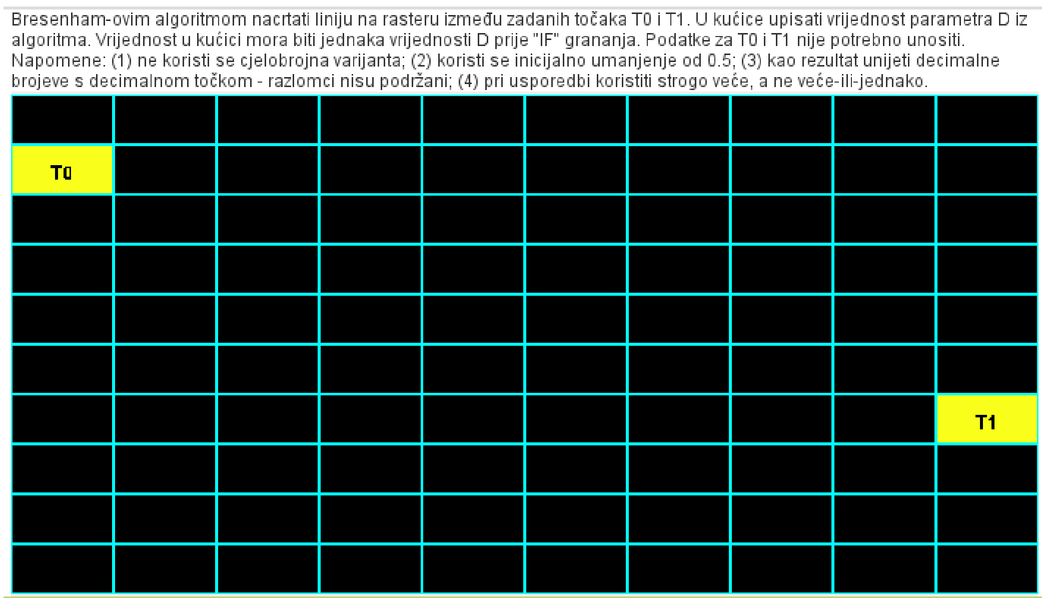
$$x = xe \quad xe = ye \quad ye = x$$

$$y = xs \quad xs = ys \quad ys = y$$

Ako su kutevi između $-45°$ i $-90°$ onda je zamjena:

$$x = xe \quad xe = ys \quad ys = x$$

$$y = xs \quad xs = ye \quad ye = y$$



Slika 96: Zadatak

Slovo D je y_f

Krenimo redom, gledajući odnos točaka T_0 i T_1 vidimo da leže na pravcu koji je pod kutem s obzirom na x-os između $0°$ i $-45°$. To znači da će a biti negativan pa će ga trebati pomnožiti s -1, y_c će se umanjivati za 1 te neće biti potrebna zamjena koordinata.

Ako na prvu to sve ne vidite, kada krenete uvrštavati u algoritam, vidjet će se nedoslijednosti pa ćete znati da je nešto krivo.

Pretpostavimo da donji lijevi crni pravokutnik ima koordinate (x=0, y=0). S obzirom na to, T_0 tada ima koordinate $T_0(0, 8)$, a $T_1(9, 3)$.

Krenimo onda redom s algoritmom 4.1:

$$a = \frac{-(3-8)}{9-0}$$

$$y_c = 8$$

$$y_f = -0.5$$

$$for(x = 0; x <= 9; x++)$$

$$osvijetli\_pixel(0, 9)$$

$$y_f = -0.5 + \frac{5}{9} = \frac{1}{18}$$

Pošto je y_f veći od 0, umanjujemo ga za jedan

$$y_f = \frac{1}{18} - 1 = -\frac{17}{18}$$

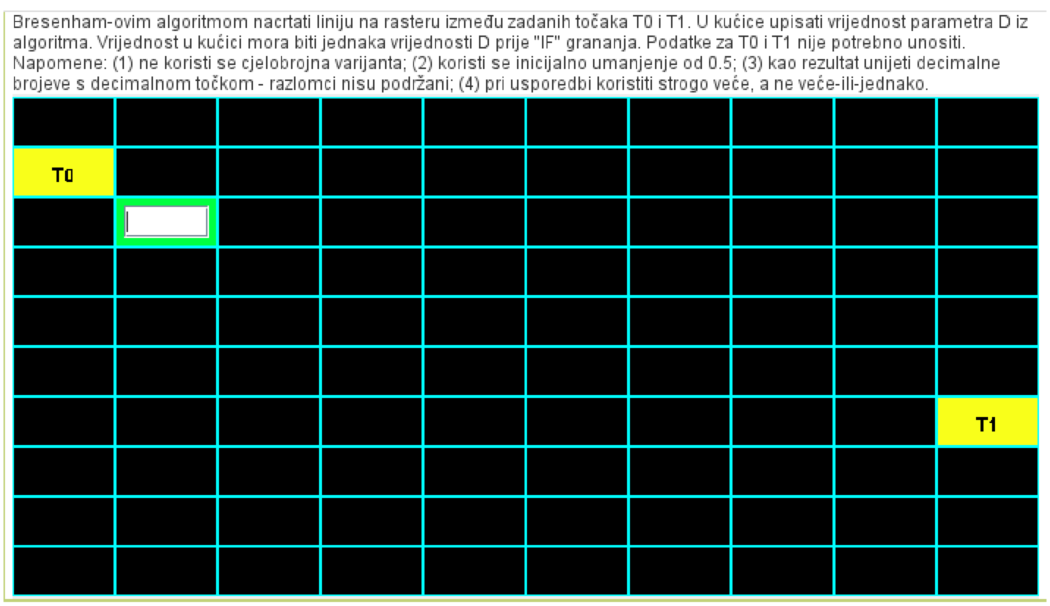
$$y_c = 8 - 1 = 7$$

Time je prva iteracija petlje završena i ona se odnosi na točku T_0. Sada je na redu druga iteracija.

$$x = 1$$

$$osvijetli\_pixel(x, y_c) = osvijetli\_pixel(1, 7)$$

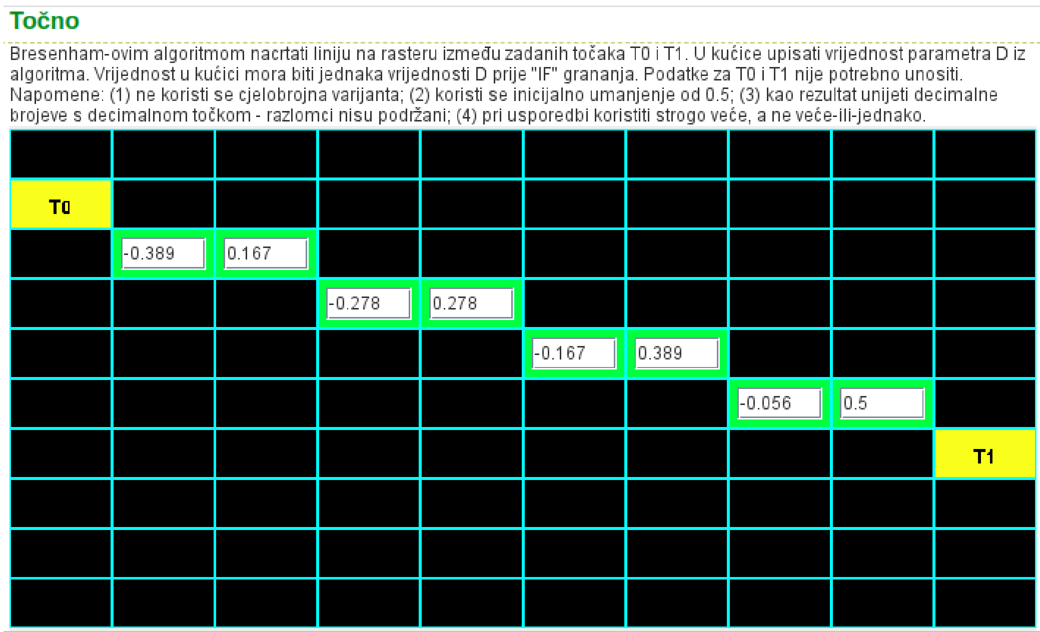
Što znači da prelazimo na sljedeći piksel koji treba osvijetliti



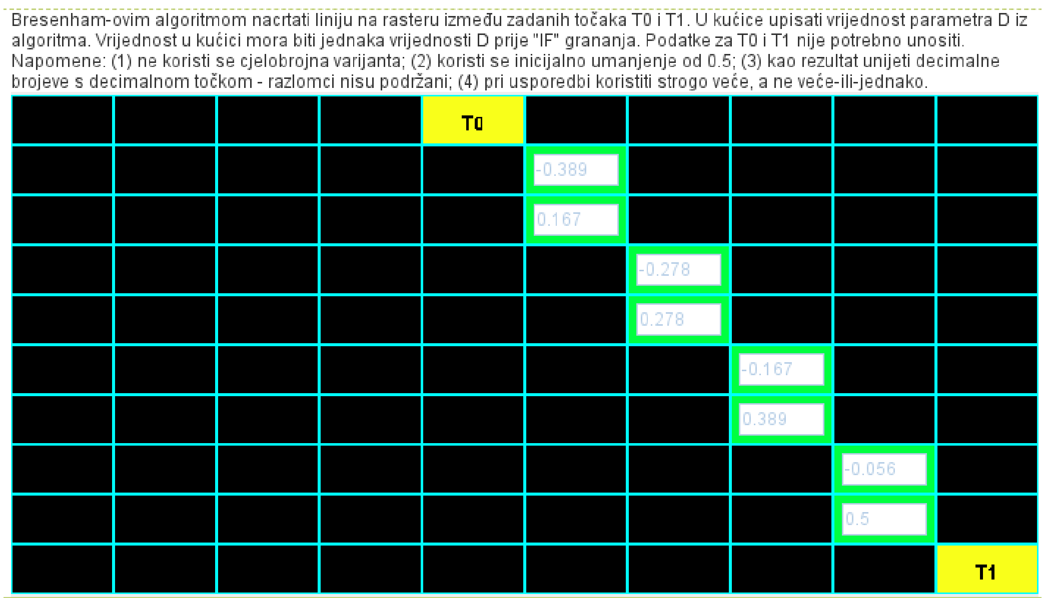
Slika 97: Piksel koji je potrebno kliknuti kako bi se osvijetlio i u njega je potrebno upisati $y_f = -0.389$

$$y_f = -\frac{17}{18} + \frac{5}{9} = -\frac{7}{18} = -0.389$$

Pošto je y_f negativan, prelazimo u sljedeću iteraciju petlje. I prateći algoritam rješavamo zadatak.



Slika 98: Zadatak riješen



Slika 99: Zadatak u kojem je bila potrebna zamjena koordinata riješen

4.2 DDA algoritam

(Preskoči ovu stranicu ako te ne zanimaju detalji, nije bitno za rješavanje zadatka)
DDA je skraćenica od Digital Diferential Analyzer. Dva kraća videa koja objašnjavaju postupak:
https://www.youtube.com/watch?v=OkH3_GdesKY
https://www.youtube.com/watch?v=Gn-XVhhXLMU
Te jedan duži koji detaljno objašnjava svaki korak:
https://www.youtube.com/watch?v=W5P8GlaEOSI

Pseudokod algoritma:

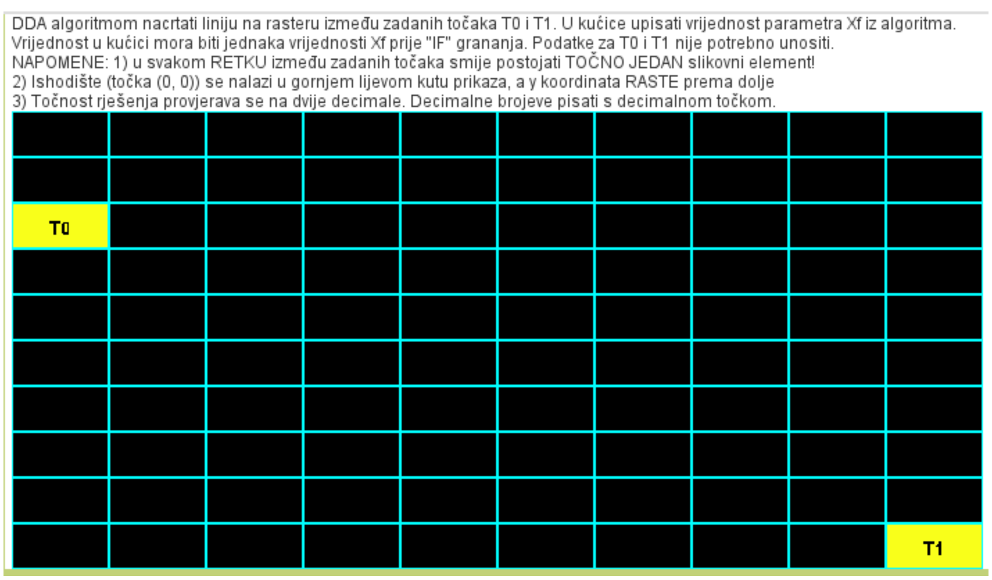
```
void DDA(int xs, int ys, int xe, int ye){
        int dx, dy, step, i;
        double xinc, yinc, x, y;

        dx = xe - xs;
        dy = ye - ys;

        if(|dx| > |dy|){
                step = |dx|;
        }
        else{
                step = |dy|;
        }

        xinc = dx/step;
        yinc = dy/step;
        x = xs;
        y = ys;

        osvijetli_pixel(zaokruzi(x), zaokruzi(y));

        for(i=0;i<step-1;i++){
                x+=xinc;
                y+=yinc;
                osvijetli_pixel(zaokruzi(x), zaokruzi(y));
        }
```

}

Algoritam koji se koristi u zadatku izgleda ovako (http://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/predavanja/4_rasterska.pdf):

```
void DDA(int x0, int y0, int x1, int y1){
        xi = x0;
        xf = -0.5;
        mi = (x1 - x0)div(y1 - y0);
        mf = (x1 - x0)/(y1 - y0)- mi;
        for (y = y0; y <= y1; y=y+1) {
                crtaj (xi,y);
                xi = xi + mi;
                xf = xf + mf;
                if (xf>=0) {
                        xi = xi + 1;
                        xf = xf - 1;
                }
        }
}
```

Gdje funkcija *div* predstavlja cjelobrojno dijeljenje (5 div 2 = 2).



Slika 100: Zadatak

Uzimajući u obzir što zadatak kaže koordinate točaka su $T_0(0,2)$ te $T_1(9,9)$. Sada kad imamo koordinate, samo ih uvrštavamo u algoritam.

$$x_i = 0$$

$$x_f = -0.5$$

$$m_i = (9-0) \quad div \quad (9-2) = 1$$

$$m_f = \frac{9}{7} - 1 = \frac{2}{7}$$

$$for(y = 2; y <= 9; y++)$$

$$crtaj(0,2)$$

$$x_i = 0 + 1 = 1$$

$$x_f = -0.5 + \frac{2}{7} = -\frac{3}{14}$$

Ovo je kraj prve iteracije koja vrijedi za T_0. Sada kreće druga iteracija

$$y = 3$$

$$crtaj(1,3)$$

$$x_i = 1 + 1 = 2$$

$$x_f = -\frac{3}{14} + \frac{2}{7} = \frac{1}{14} = 0.071$$

Pošto je x_f veći od nule, ulazi u if

$$x_i = 2 + 1 = 3$$

$$x_f = \frac{1}{14} - 1 = -\frac{13}{14}$$

I tako dalje prolazimo kroz for petlju.

Slika 101: Zadatak riješen

5 Modeliranje i reprezentacija objekata

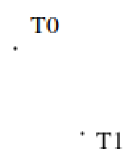
5.1 Reprezentacija objekta

5.1.1 OpenGL strukture podataka - Jednostavniji slučaj

Sve grafičke primitive koji se mogu pojaviti u zadatku i objašnjenja, moguće je pronaći u knjizi na stranici 10. Kratki opis svake:

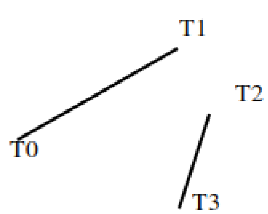
GL_POINTS -> zada li se n točaka toliko će ih se i nacrtati
Pseudokod koji je sličan za sve grafičke primitive:

```
glBegin(GL_POINTS);
        glVertex2i(3, 3)
        glVertex2i(2, 1)
glEnd() //crta dvije tocke
```



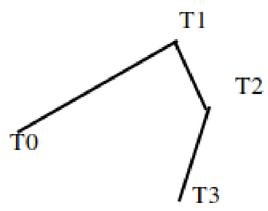
Slika 102: GL_POINTS

GL_LINES -> svake dvije točke se tumače kao jedna linija, n točaka, $n/2$ linija



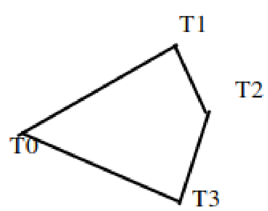
Slika 103: GL_LINES

GL_LINES_STRIP -> n točaka za $n-1$ linija, poluotvoren poligon



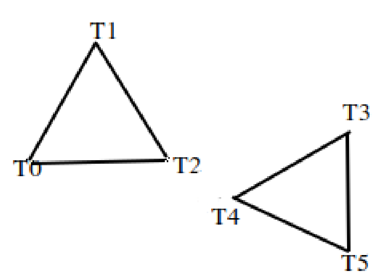
Slika 104: GL_LINE_STRIP

GL_LINE_LOOP -> n točaka daje n linija, zatvoreni poligon



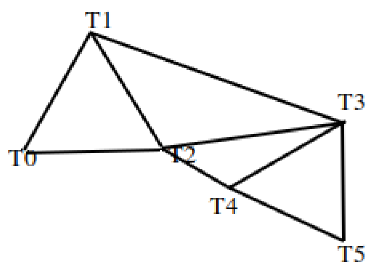
Slika 105: GL_LINE_LOOP

GL_TRIANGLES -> zadane točke se grupiraju po tri te čine trokut, za n točaka se dobije $n/3$ trokuta Za 6 točaka:



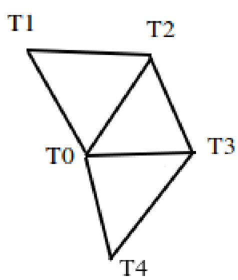
Slika 106: GL_TRIANGLES

GL_TRIANGLE_STRIP -> n točaka za $n-2$ trokuta (T0-T1-T2, T1-T2-T3, T2-T3-T4,...)



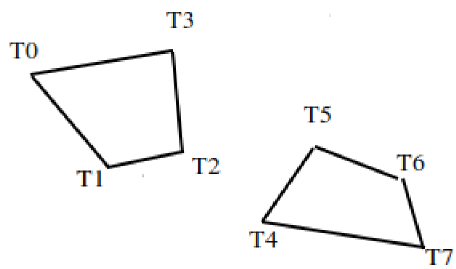
Slika 107: GL_TRIANGLE_STRIP

GL_TRIANGLE_FAN -> n točaka u $n-2$ trokuta koji dijele jedan zajednički (početni) vrh



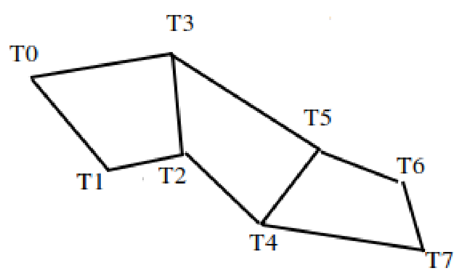
Slika 108: GL_TRIANGLE_FAN

GL_QUADS -> sve točke se grupiraju po 4, n točaka, $n/4$ četverokuta



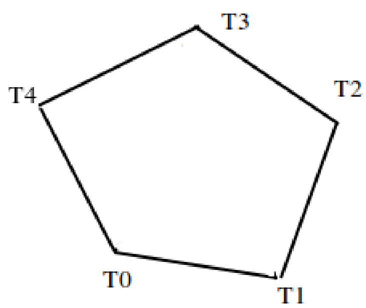
Slika 109: GL_QUADS

GL_QUAD_STRIP -> točke se tumače kao povezani četverokuti (T1-T2-T4-T3, T3-T4-T6-T5, ...), n točaka za $n/2 - 1$ četverokuta

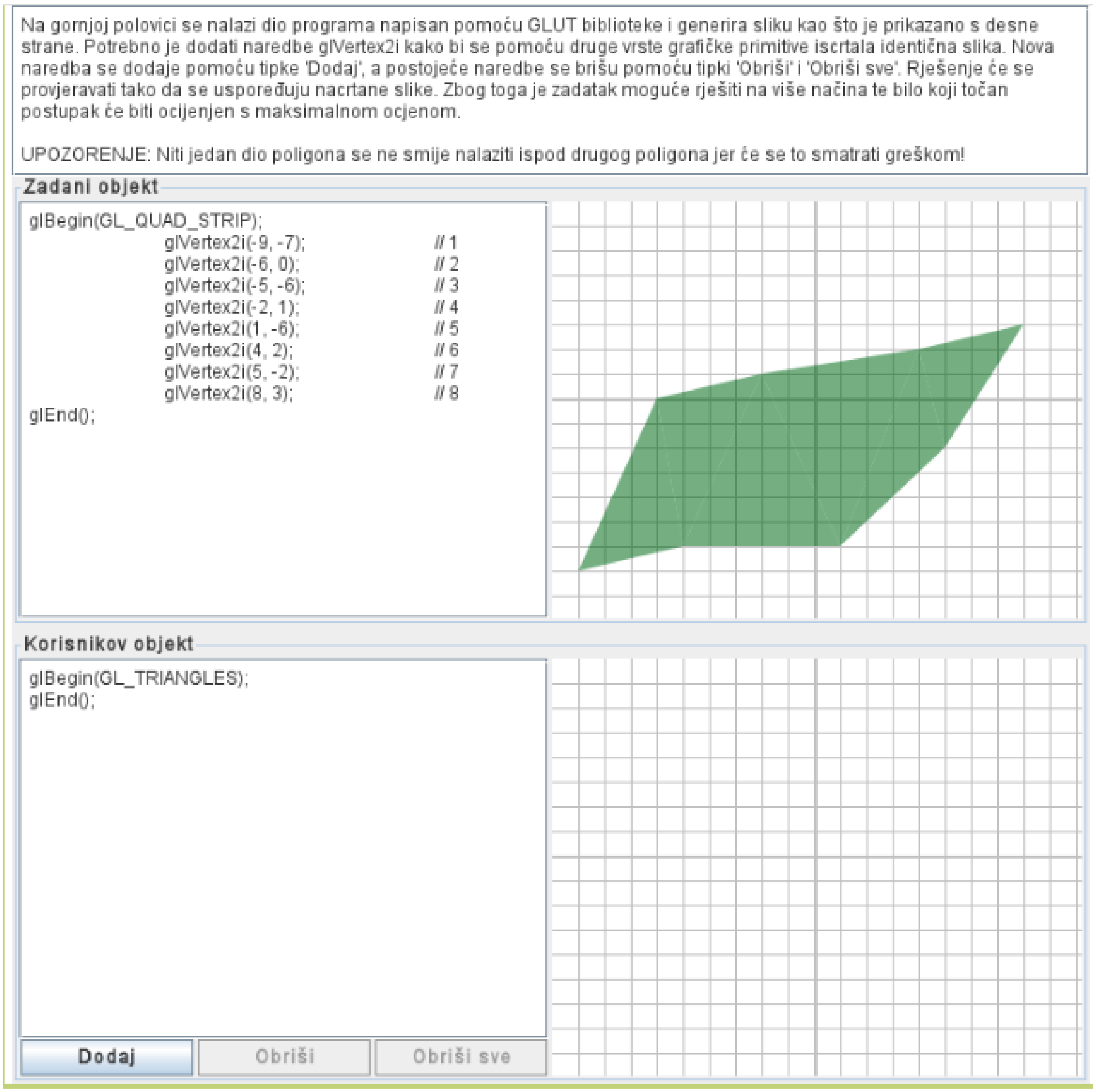


Slika 110: GL_QUAD_STRIP

GL_POLYGON -> crta se jednostavan konveksan poligon zadan točkama. Npr. za 5 točaka:

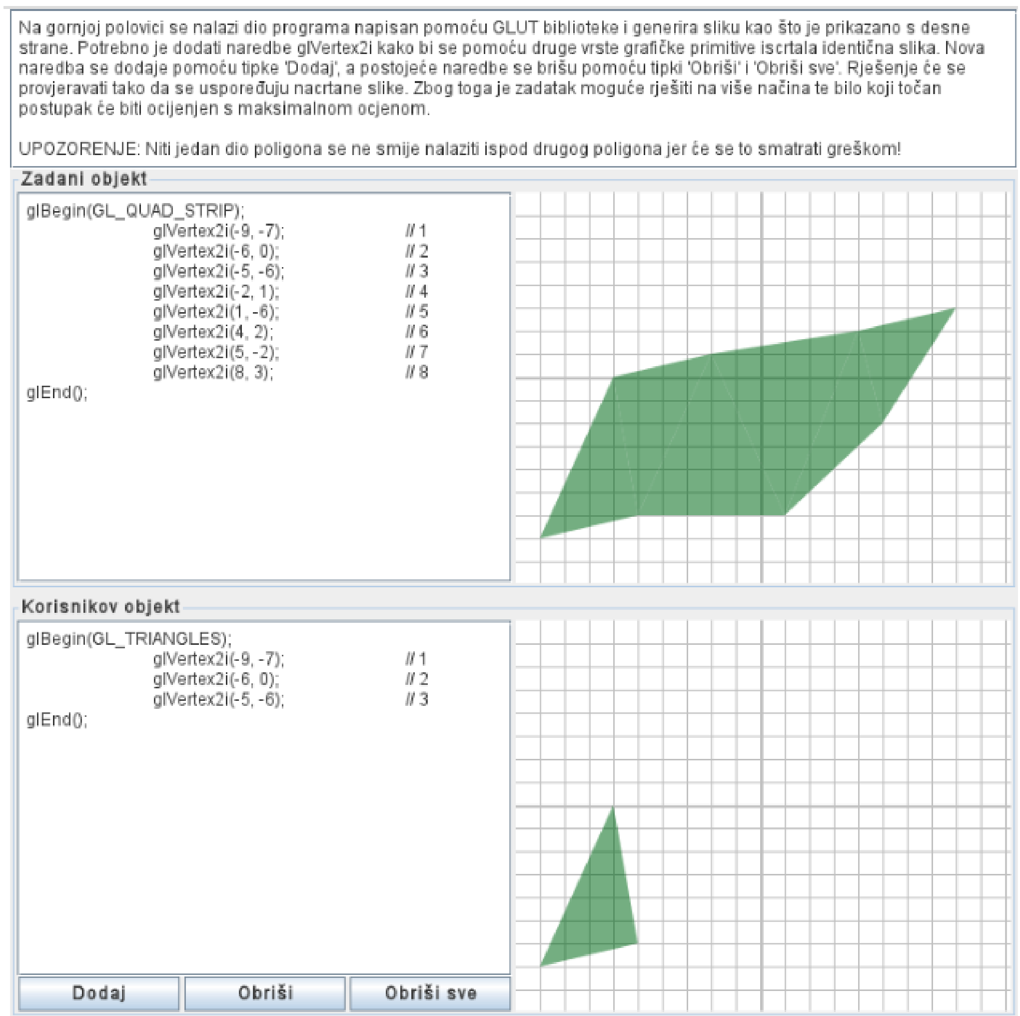


Slika 111: GL_POLYGON



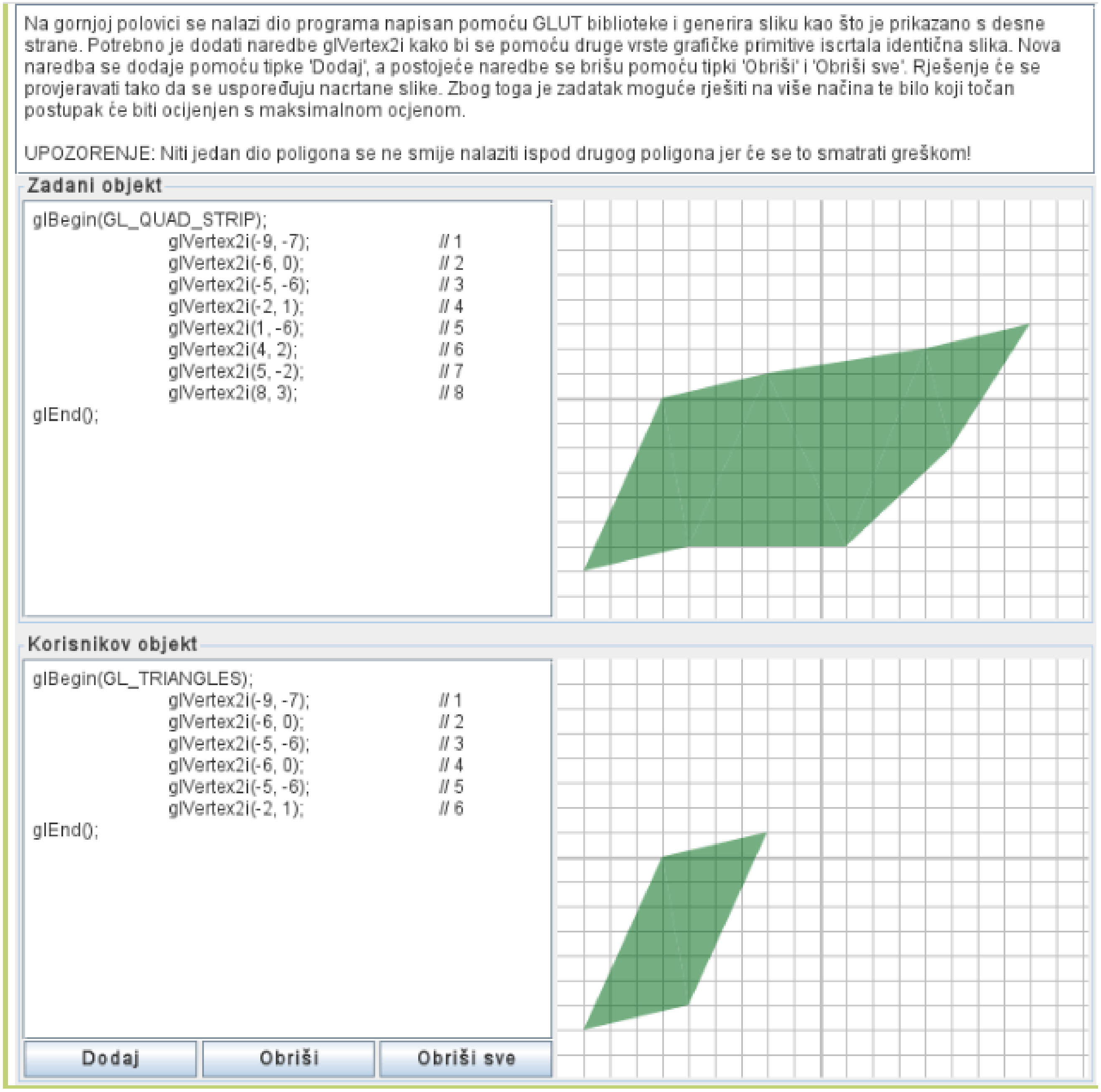
Slika 112: Zadatak

Kako u zadatku imamo zadane GL_QUAD_STRIP znamo da 8 točaka čini $n/2 - 1 = 3$ četverokuta. Tri četverokuta je potrebno prikazati pomoću 6 trokuta. Pošto se radi o GL_TRIANGLES, svaki trokut treba crtati zasebno što znači da će nam za prikaz ovog poligona biti potrebno 18 točaka. Krenimo od prve točke i nacrtajmo prvi trokut, njegovi vrhovi su $T_1(-9,-7), T_2(-6,0), T_3(-5,-6)$

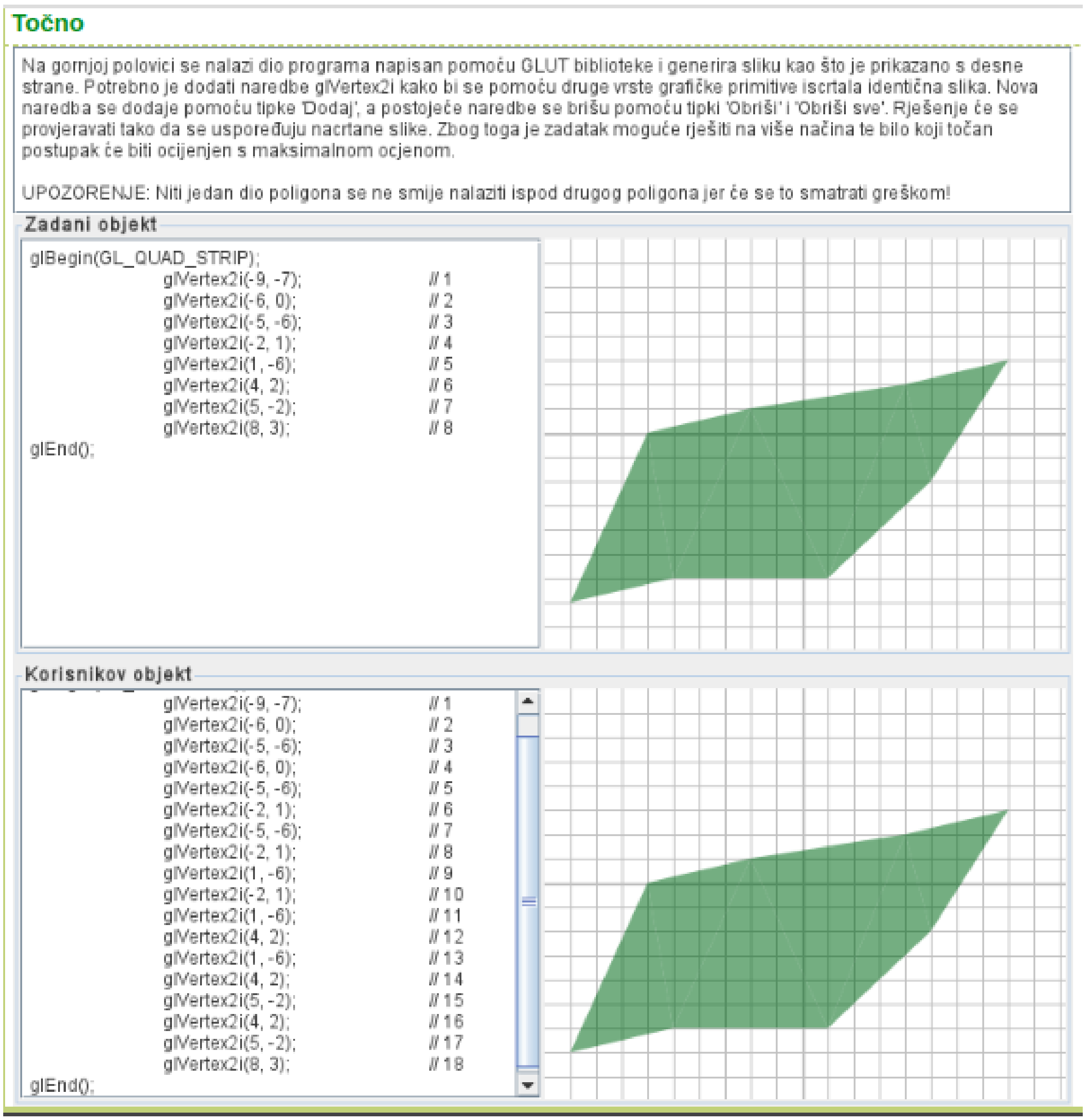


Slika 113: Nacrtan prvi trokut

Kako tijelo treba biti bez prekida i popunjeno, sljedeći trokut glasi $T_2(-6,0), T_3(-5,-6), T_4(-2,1)$ I tako nastavljamo dalje...



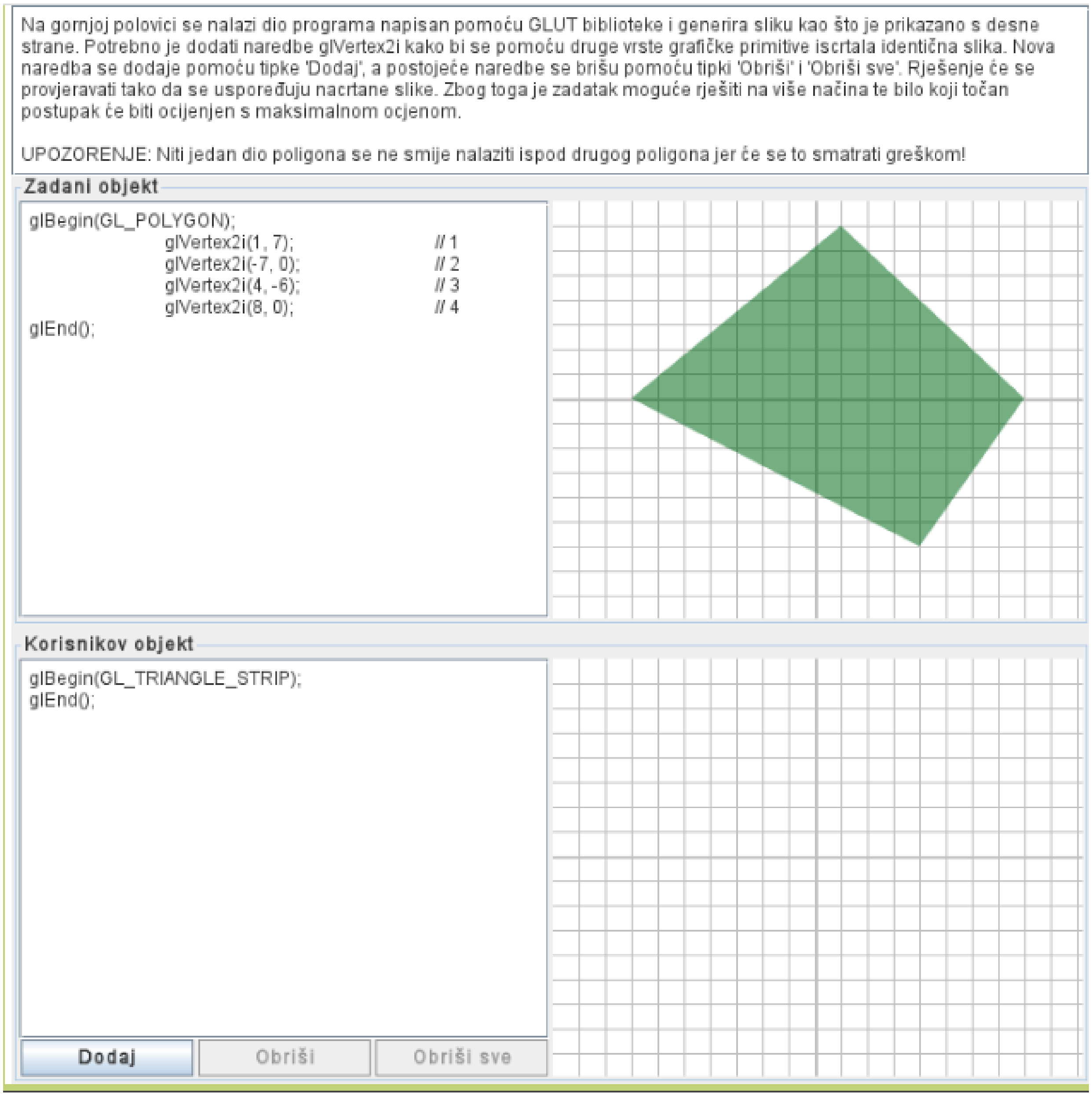
Slika 114: Nacrtan drugi trokut



Slika 115: Zadatak riješen

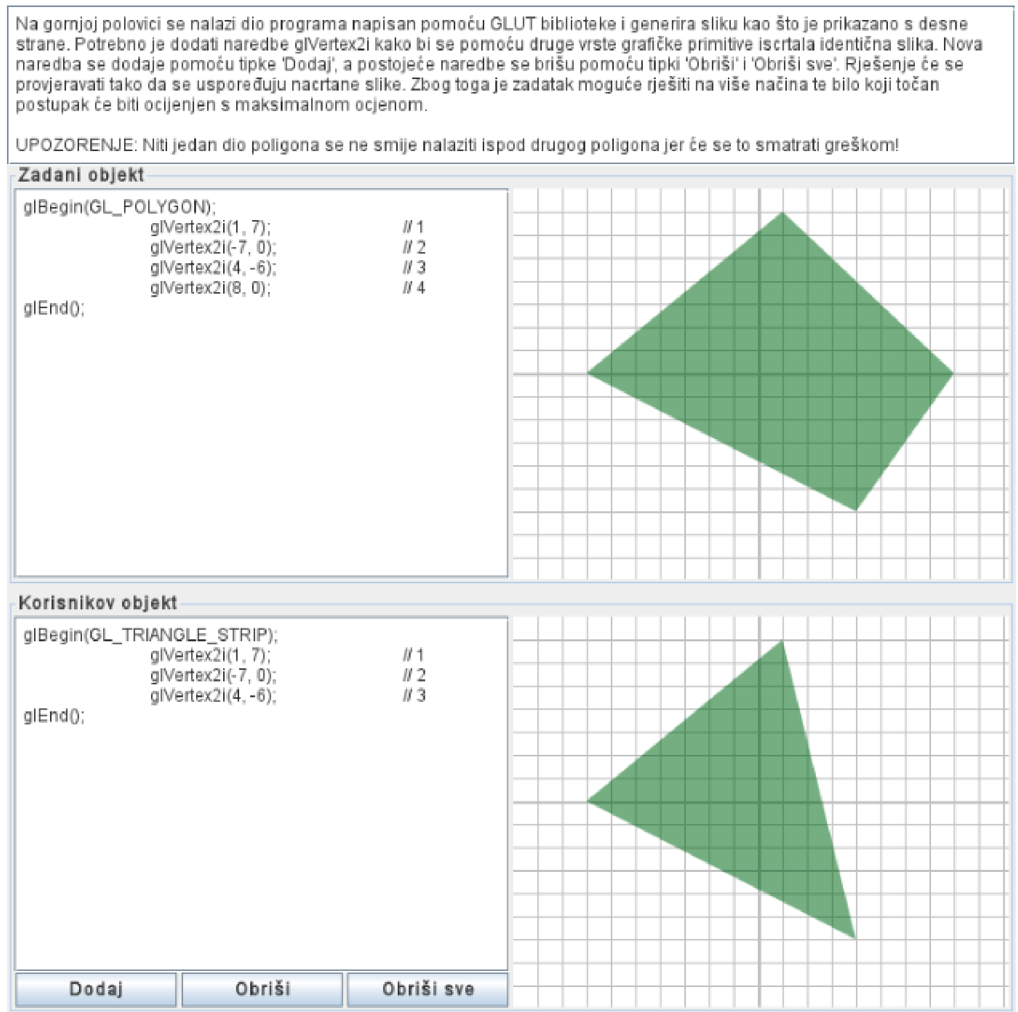
5.1.2 OpenGL strukture podataka - Potencijalno složeniji slučaj

Za definicije primitiva posjetite prethodno potpoglavlje 5.1.1. Krenimo re-



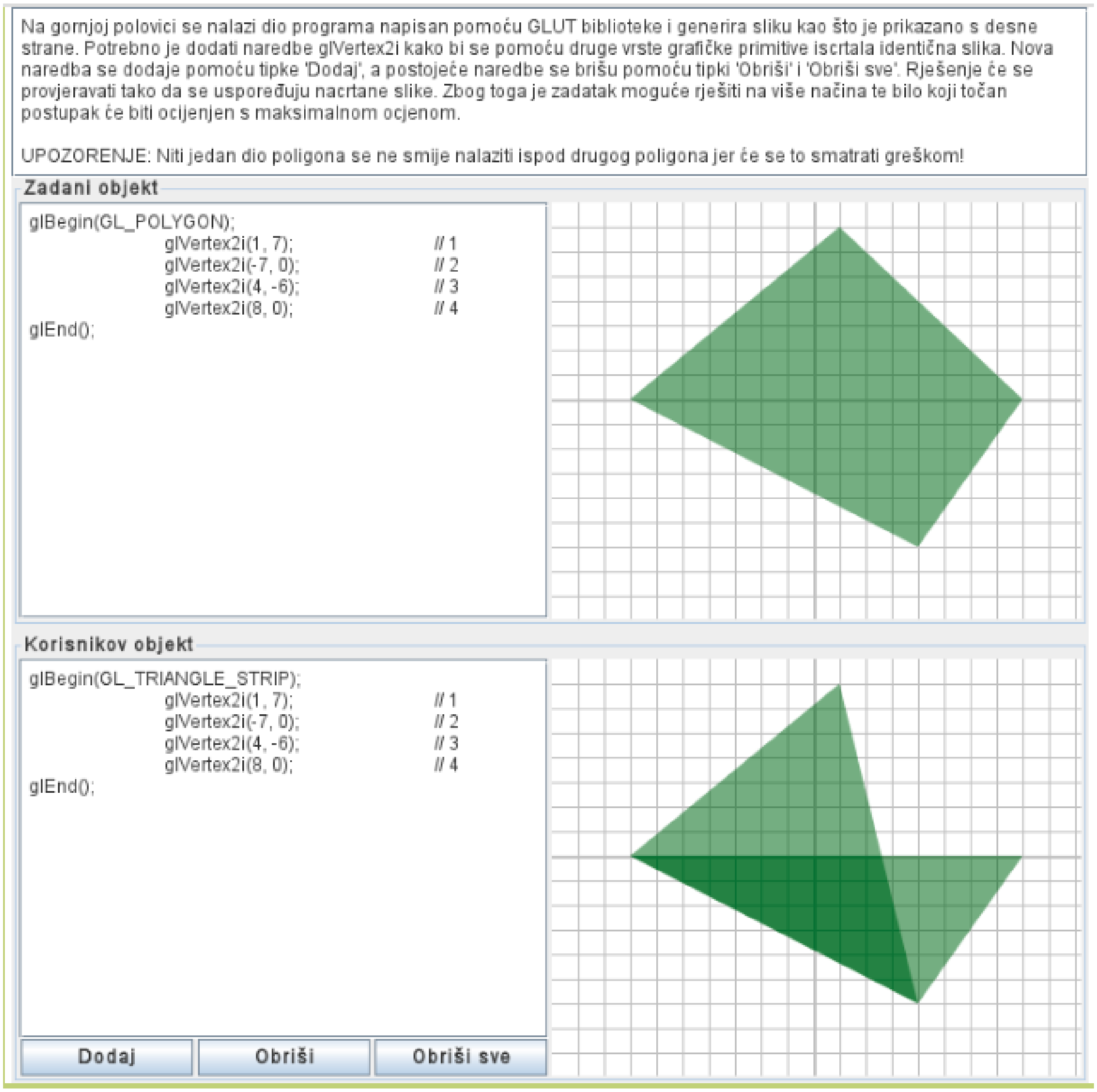
Slika 116: Zadatak

dom, imamo poligoni čiji je $n = 4$, odnosno, četverokut. Četverokut se sastoji od dva trokuta. A kako radi GL_TRIANGLE_STRIP? Zadaju se tri točke za trokut, četvrta točka koja se zada, automatski povezuje prethodne dvije i četvrtu. Stoga, u ovom zadatku treba biti oprezniji. Naime, možete krenuti rješavati redom točke i tako ih i upisati te bi se na prvi pogled dobio korektan rezultat.



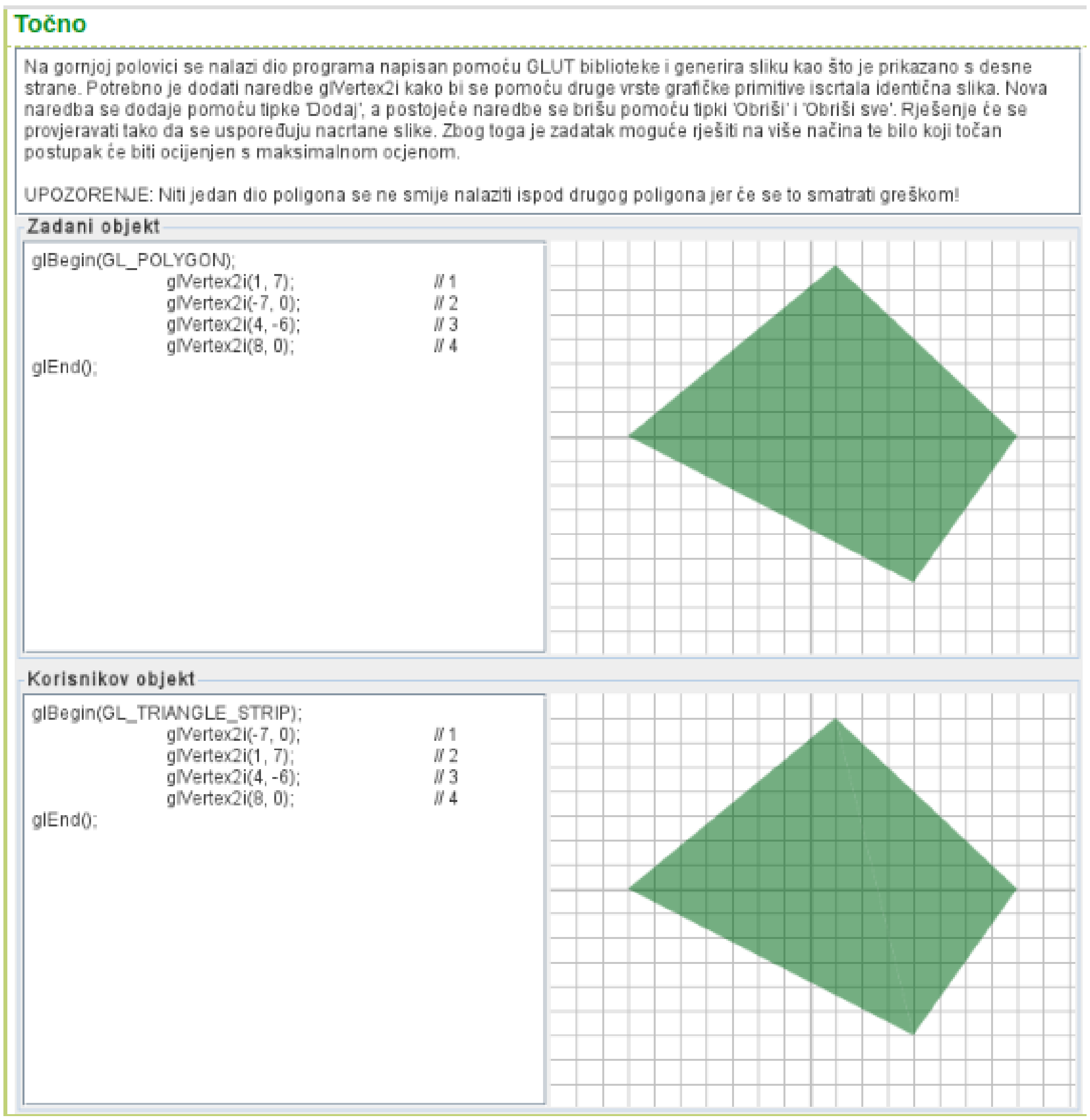
Slika 117: Krivi redoslijed točaka

Ali kada bismo dodali četvrtu točku



Slika 118: GREŠKA!

Korektno rješenje je prikazano u nastavku (obratite pažnju na redoslijd točaka)



Slika 119: Zadatak riješen

5.2 Strukture podataka

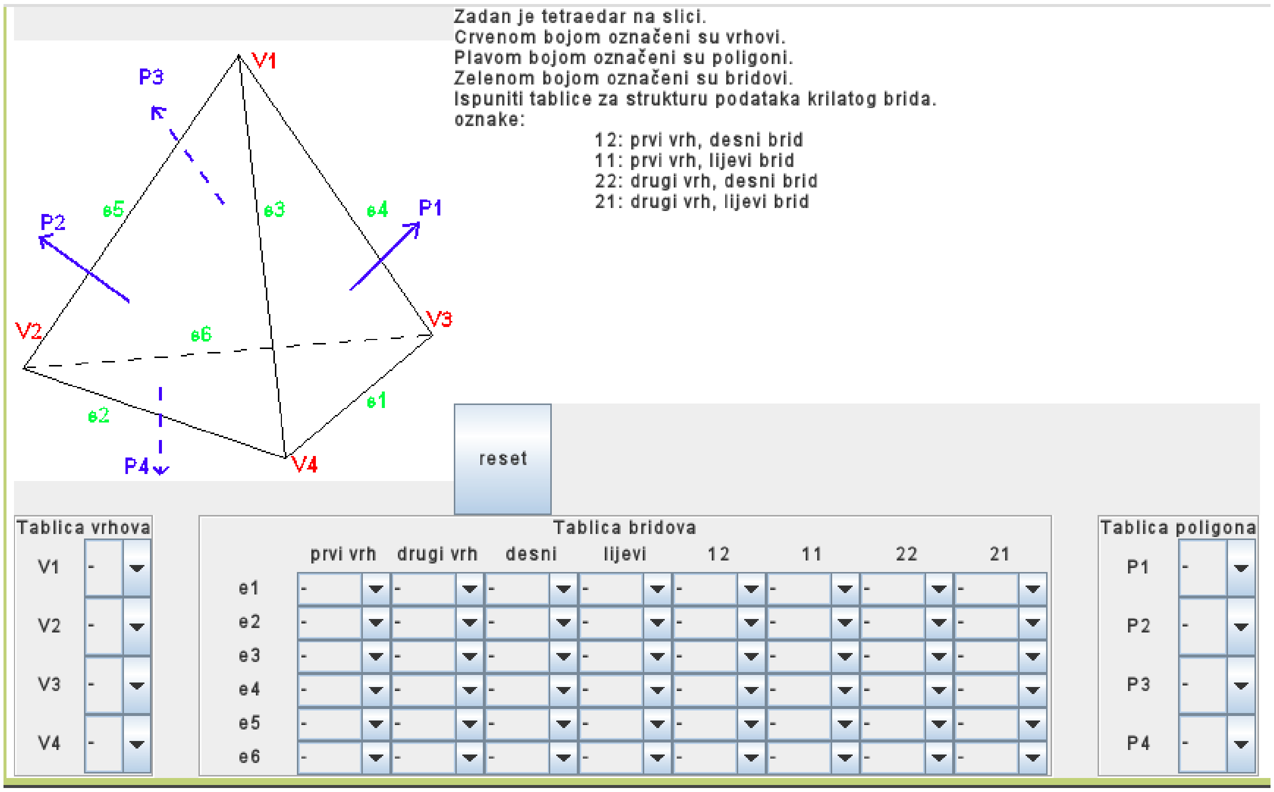
5.2.1 Krilati brid - popunjavanje tablice

Objašnjenje tablice krilatog brida se može pronaći na sljedećem linku na 22. slajdu
http://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/predavanja/5_modeliranje.pdf
Ukratko, krilati brid je tablica koja se sastoji od tri podtablice:

- tablica bridova, a ona se sastoji od
  - koji vrhovi čine brid (početni, završni)
  - koji poligoni čine brid (lijevi, desni)
  - bridovi lijevog poligona (brid koji prethodi, brid koji slijedi)
  - bridovi desnog poligona (brid koji prethodi, brid koji slijedi)
- tablica vrhova
  - jedan brid (bilo koji)
- tablica poligona
  - jedan brid (bilo koji)

Inače, krilate bridove nije teško odrediti, pogotovo ako malo bolje proučite slajdove, ali u ovom zadatku je malo zeznutije. Jedna od stvari koju je potrebno prisjetiti se je ta da ako imamo početni vrh brida i završni vrh brida, te ako zamislimo da stojimo na tom bridu i krećemo se od početnog brida do završnog, možemo odrediti što je desno od nas, a što lijevo.

Popis krila za pojedini brid su svi bridovi koji, brid koji promatramo, dodiruju u vrhovima od kojih je sačinjen.



Slika 120: Zadatak

Što se tiče tablice vrhova za svaki vrh upisujemo jedan od tri brida koji vrh čini. Znači za vrh V_1 možemo upisati e_5, e_3 ili e_4, tako i za ostale vrhove. Znači nije bitno koji brid izaberemo. Ista stvar je i s poligonima. Na primjer, za poligon P_1 možemo izabrati bilo koji od tri brida koji ga čine e_1, e_3 ili e_4.

Stvar postaje ozbiljnija kada počnemo rješavati tablicu bridova. Krenimo redom s bridom e_1. Brid e_1 čine vrhovi V_3 i V_4. Koji je prvi vrh, a koji drugi, nije baš bitan redoslijed, no konzistentnosti radi, vrh s manjim indeksom neka bude prvi, a vrh s većim indeksom drugi. Stoga, za prvi vrh kod brida e_1 upisuje se V_3, a drugi vrh je V_4.

Kada smo odredili koji je prvi vrh, a koji drugi, vrijeme je da odredimo koji je desni poligon, a koji lijevi. To se radi na slijedeći način. Zamislimo da se krećemo iz početnog vrha (V_3) u završni (V_4) šetajući se tako da se nalazimo **izvan** poligona. Desno od nas se nalazi poligon P_1, a lijevo od nas se nalazi poligon P_4.

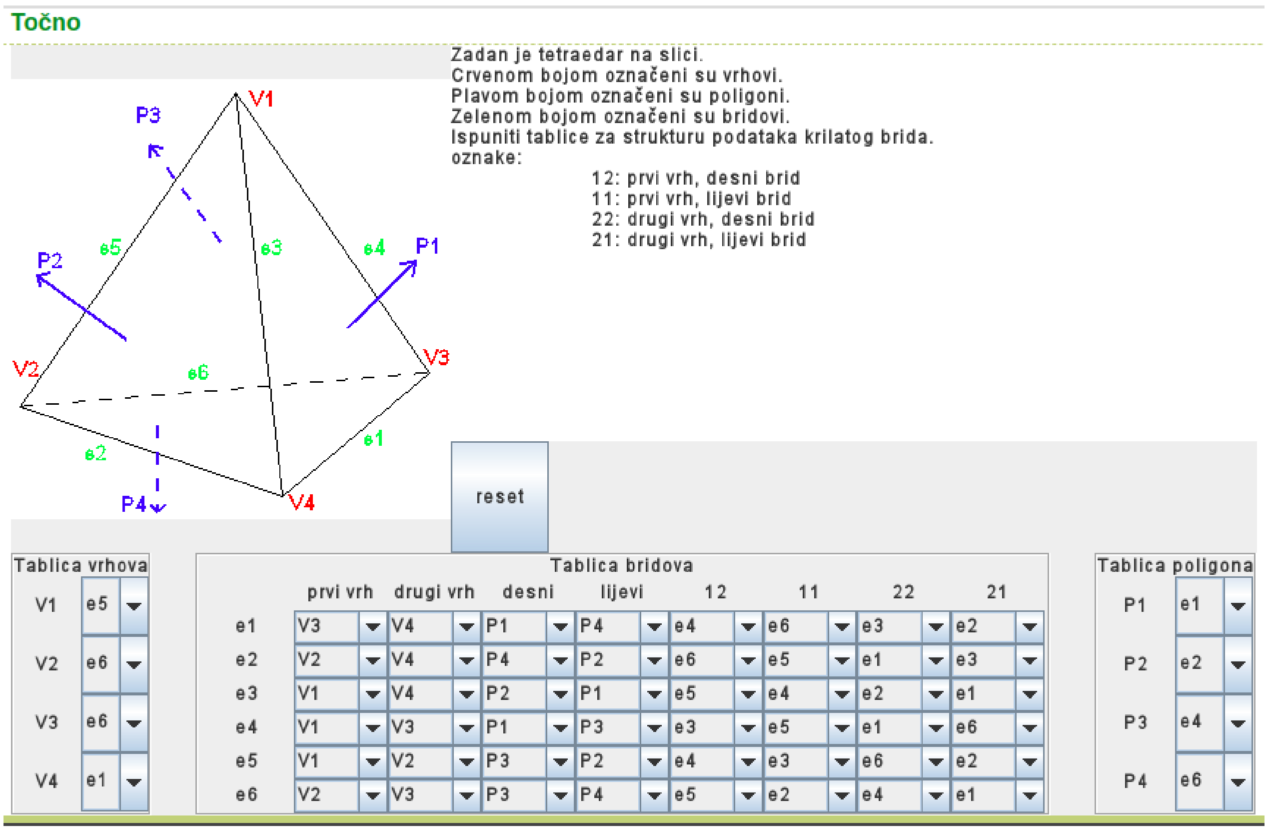
Sada kada su i poligoni određeni potrebno je odrediti krilate bridove. 12 znači da gledamo prvi vrh, u ovom slučaju V_3 te desni poligon (jer se na desnom poligonu nalazi desni brid), u ovom slučaju P_1. Kako promatramo vrh V_3, brid e_1 i poligon P_1 desni brid će biti e_4 i to upisujemo u tablicu pod 12. Zašto baš e_4? Jer je u sklopu poligona P_1 i sadrži vrh V_3. Drugi brid koji zadovoljava ta dva uvjeta je brid e_1, ali kako njega promatramo, ne možemo ga staviti na mjesto 12. Da kojim slučajem ne postoji desni poligon, onda bismo na mjesto 12 morali staviti brid e_1.

Pod 11 promatramo prvi vrh (V_3) i lijevi brid (P_4). Procedura je ista te zaključujemo kako na mjesto 11 treba ići e_6.

Pod 22 gledamo drugi vrh (V_4) i desni brid (P_1). Procedura je ista te zaključujemo da pod 22 ide ide $e3$.

Pod 21 ide drugi vrh (V_4) i lijevi brid (P_4). Procedura je ista te zaključujemo da pod 21 ide brid e_2.

Isti postupak ponovimo za sve bridove i dobije se rješenje. Napomena: ako se vrhovi zamijene, mijenjaju se lijevi i desni poligon pa tako i krilati bridovi.



Slika 121: Zadatak riješen

5.2.2 Pretvorbe različitih struktura podataka

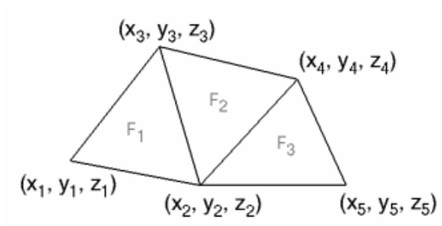
Objašnjenja pojedinih tablica su dostupna na http://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/predavanja/5 od slajda 17. S istog linka su preuzete i prve tri slike ovog potpoglavlja. Ukratko:

- **Tablica poligona**
  - sastoji se od poligona i vrhova koji čine poligon (vrhovi su prikazani preko koordinata)
  - redoslijed vrhova određuje orijentaciju poligona
- **Tablice vrhova i poligona**
  - tablica vrhova se sastoji od vrhova i njihovih koordinata
  - tablica poligona se sastoji od vrhova koji čine poligon
  - redoslijed vrhova određuje orijentaciju poligona
- **Tablice bridova, vrhova i poligona**
  - tablica vrhova se sastoji od vrhova i njihovih koordinata
  - tablica bridova se sastoji brida i vrhova koji čine taj brid
  - tablica poligona se sastoji od poligona i bridova koji čine taj poligon
  - redoslijed bridova određuje orijentaciju poligona
  - redoslijed vrhova određuje orijentaciju brida
- **Liste susjednosti**
  - tablica bridova
    - koji vrhovi čine brid
    - koji bridovi su susjedni (diraju prvi ili drugi vrh)
    - koji poligoni čine brid
  - tablica vrhova
    - susjedni vrhovi
    - bridovi koje taj vrh sačinjava
    - poligoni koje taj vrh sačinjava

- tablica poligona
    - ∗ vrhovi od kojih je sačinjen
    - ∗ bridovi od kojih je sačinjen
    - ∗ susjedni poligoni

- **Krilati brid** - posjeti prethodno potpoglavlje 5.2.1

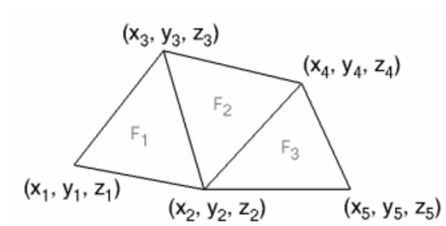
Tablica poligona	
F_1	(x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3)
F_2	(x_2, y_2, z_2) (x_4, y_4, z_4) (x_3, y_3, z_3)
F_3	(x_2, y_2, z_2) (x_5, y_5, z_5) (x_4, y_4, z_4)



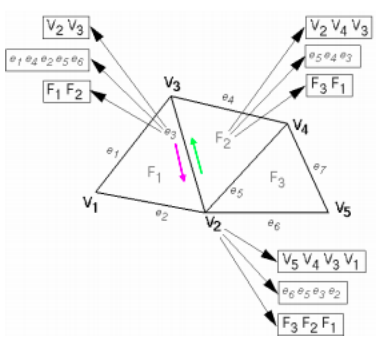
(a) Tablica poligona

Tablica vrhova			
V_1	X_1	Y_1	Z_1
V_2	X_2	Y_2	Z_2
V_3	X_3	Y_3	Z_3
V_4	X_4	Y_4	Z_4
V_5	X_5	Y_5	Z_5

Tablica poligona			
F_1	V_1	V_2	V_3
F_2	V_2	V_4	V_3
F_3	V_2	V_5	V_4



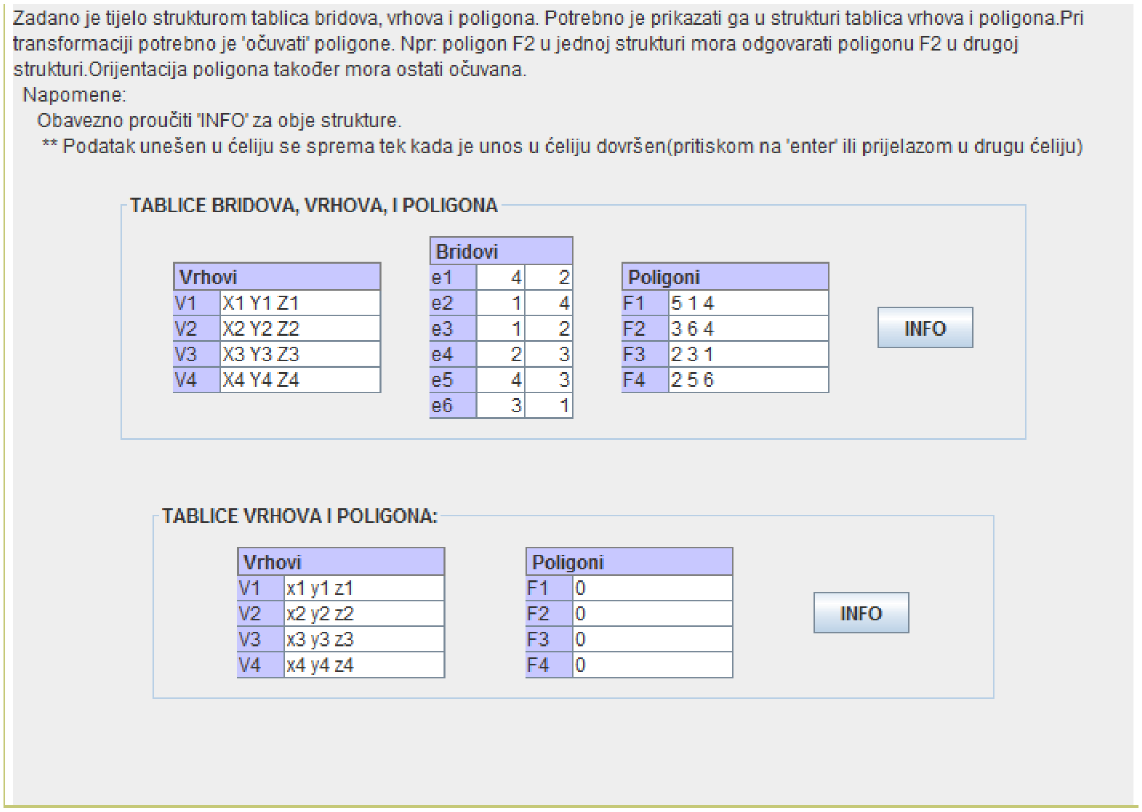
(b) Tablica vrhova i poligona



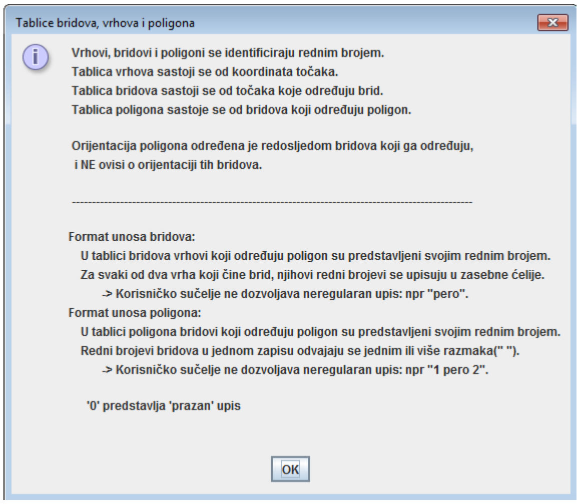
(c) Liste susjednosti

Slika 122: Tablice

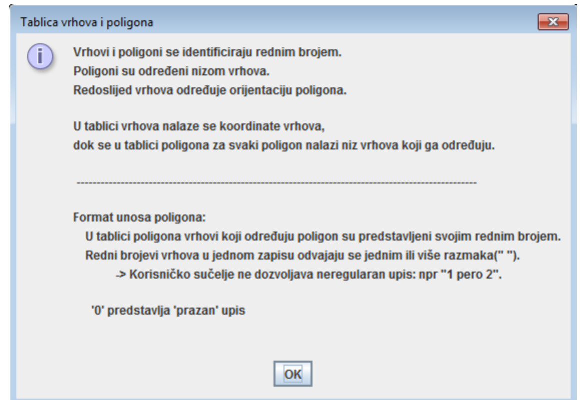
Postoji nekoliko vrsta zadataka koje se mogu pojaviti, ovdje će biti riješena tri. Prvi slučaj je da imamo **tablicu bridova, vrhova i poligona** u kojoj nam je zadano tijelo, a trebamo ispisati **tablicu vrhova i poligona**.



Slika 123: Zadatak 1



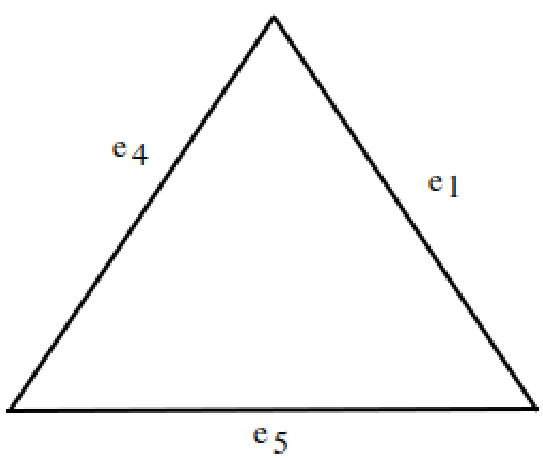
(a) INFO Tablice bridova, vrhova i poligona



(b) INFO Tablice vrhova i poligona

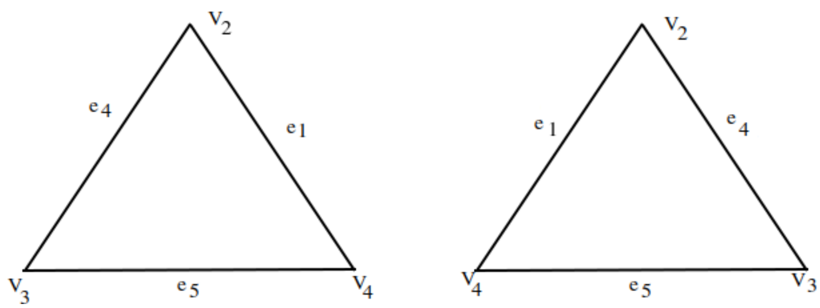
Slika 124: INFO-i

Za sve ove zadatke je dobro napraviti skicu. Kako se tijelo koje je zadano sastoji od 4 vrha, 6 bridova i 4 poligona, zaključujemo da se radi o tetraedru. Skiciranje je uvijek najbolje započeti crtanjem poligona. Krenimo s poligonom F_1. Piše da se sastoji od bridova e_5, e_1 i e_4. Skica bi mogla izgledati:



Slika 125: Poligon F_1

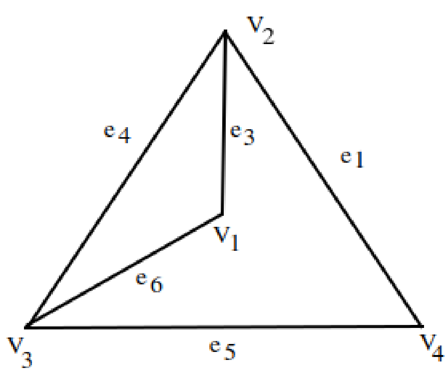
Nije bitno stavimo li na mjesto e_1 brid e_4 ili obrnuto, dok god su vrhovi podudarni. Sada pogledajmo koji vrhovi čine skicirane bridove. Brid e_5 čine vrhovi V_4 i V_3, brid e_1 čine vrhovi V_4 i V_2 te brid e_4 čine vrhovi V_2 i V_3. I to označimo na skici kako bi se podudarilo (bitno je da se vrhovi podudare).



(a) Prva skica (b) Druga skica

Slika 126: Moguće skice

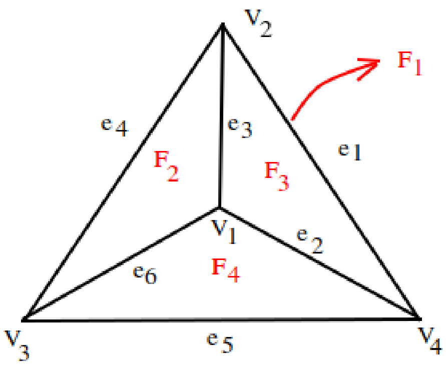
Nastavljamo sa skicom a). Sada kada smo to riješili, za rješenje kod poligona F_1 u tablici vrhova i poligona možemo upisati 2 4 3 ili 3 2 4 ili 4 3 2. Zašto baš taj redoslijed? Jer u tablici bridova, vrhova i poligona je orijentacija poligona zadana preko redoslijeda bridova (u ovom slučaju bridovima e_5 e_4 e_1). Uzet ćemo 2 4 3.
Sada iz tablice bridova, vrhova i poligona pogledajmo drugi poligon i njega dodajmo na našu skicu. Kako je poligon F_2 zadan bridovima redom e_3, e_6 i



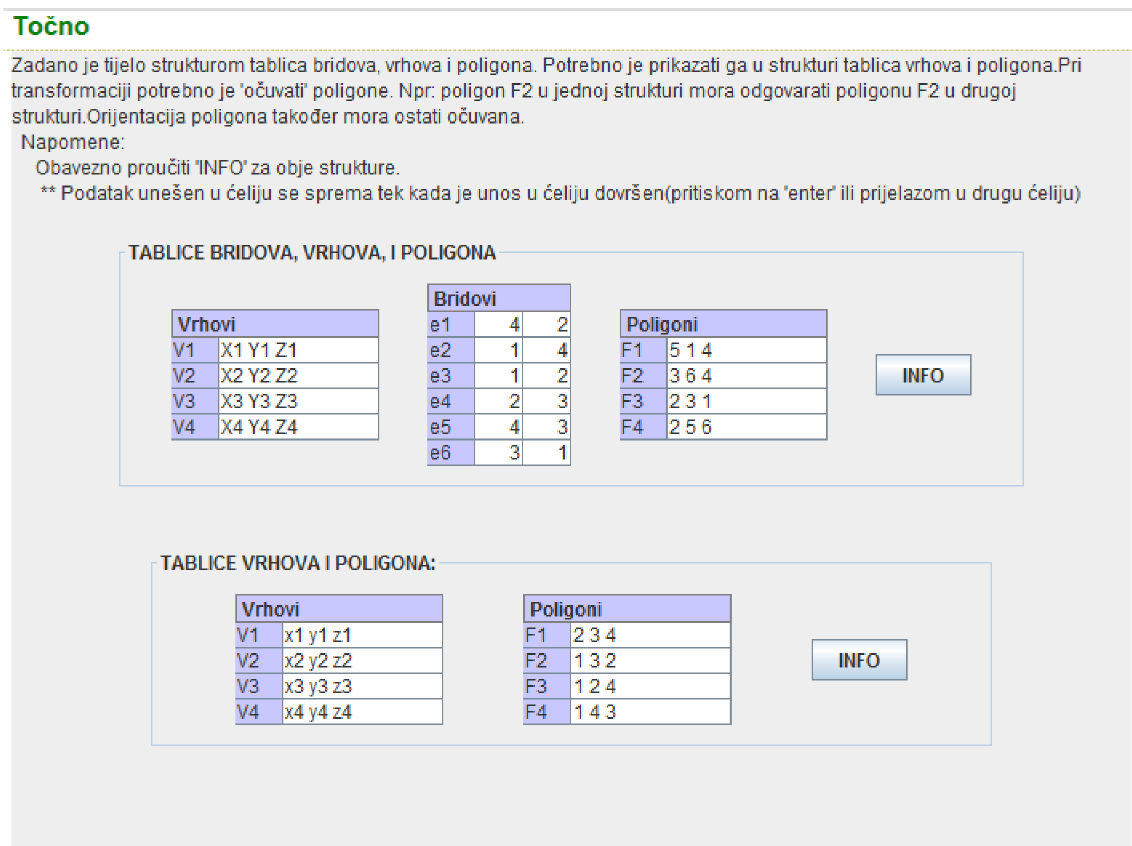
Slika 127: Poligoni F_1 i F_2

e_4 u tablicu vrhova i poligona upisujemo vrhove 1 3 2 u tom redoslijedu.

Na taj način nastavljamo dalje i rješavamo zadatak.



Slika 128: Konačna skica



Točno

Zadano je tijelo strukturom tablica bridova, vrhova i poligona. Potrebno je prikazati ga u strukturi tablica vrhova i poligona.Pri transformaciji potrebno je 'očuvati' poligone. Npr: poligon F2 u jednoj strukturi mora odgovarati poligonu F2 u drugoj strukturi.Orijentacija poligona također mora ostati očuvana.

Napomene:

Obavezno proučiti 'INFO' za obje strukture.

** Podatak unešen u ćeliju se sprema tek kada je unos u ćeliju dovršen(pritiskom na 'enter' ili prijelazom u drugu ćeliju)

TABLICE BRIDOVA, VRHOVA, I POLIGONA

Vrhovi	
V1	X1 Y1 Z1
V2	X2 Y2 Z2
V3	X3 Y3 Z3
V4	X4 Y4 Z4

Bridovi		
e1	4	2
e2	1	4
e3	1	2
e4	2	3
e5	4	3
e6	3	1

Poligoni	
F1	5 1 4
F2	3 6 4
F3	2 3 1
F4	2 5 6

INFO

TABLICE VRHOVA I POLIGONA:

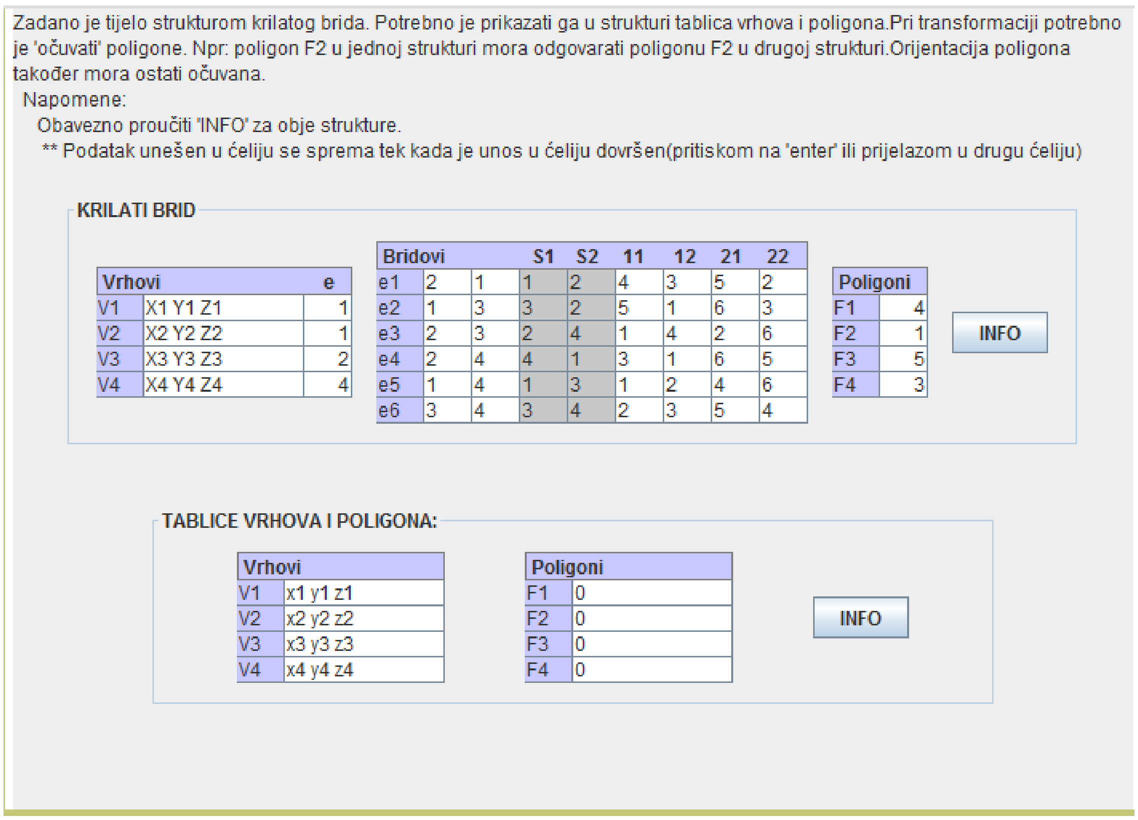
Vrhovi	
V1	x1 y1 z1
V2	x2 y2 z2
V3	x3 y3 z3
V4	x4 y4 z4

Poligoni	
F1	2 3 4
F2	1 3 2
F3	1 2 4
F4	1 4 3

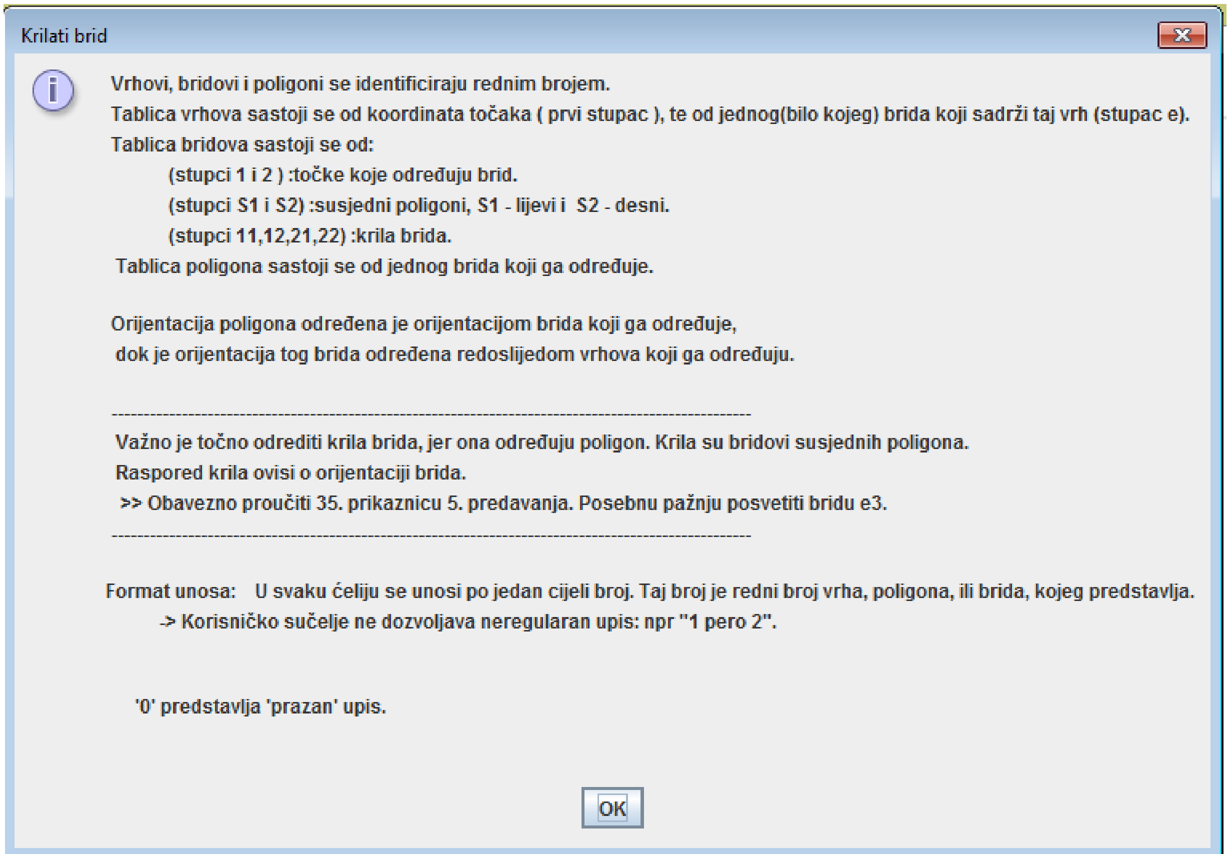
INFO

Slika 129: Zadatak 1 riješen

Drugi slučaj koji se može pojaviti je da imamo zadano tijelo **tablicom krilatog brida**,a potrebno ga je prikazati preko **tablice vrhova i poligona**.

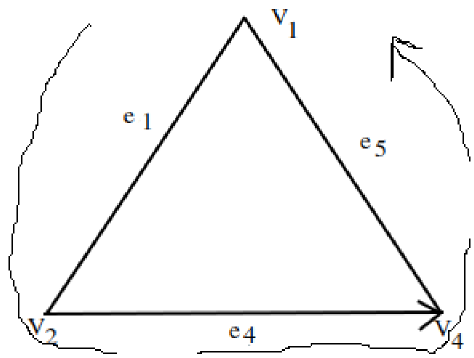


Slika 130: Zadatak 2



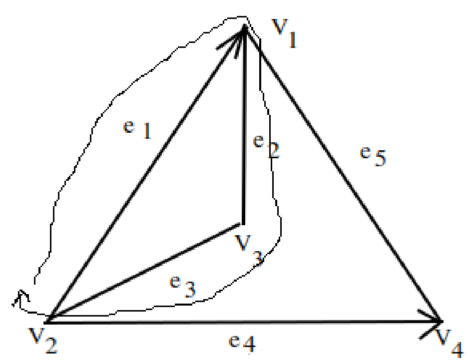
Slika 131: INFO za krilate bridove

Kao i u prethodnom slučaju, krenemo od skice poligona. Prvo ćemo skicirati poligon F_1. Promatrajmo tablicu krilatih bridova. U tablici poligona je napisan brid koji će odrediti smjer poligona (pogledaj INFO za krilate bridove 131). Orijentaciju poligona F_1 određuje brid e_4.
Gledajući stupce $S1$ i $S2$ zaključujemo da se poligon F_1 sastoji od bridova e_1, e_4 i e_5. U tablici bridovi dodatno vidimo točke od kojih se ta tri brida sastoje pa skica bi izgledala:



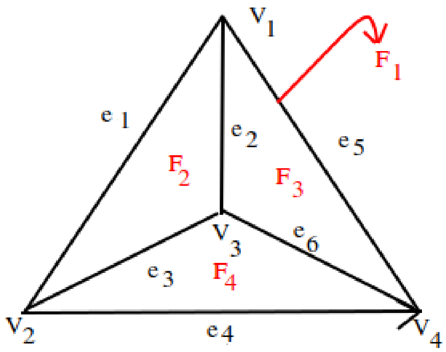
Slika 132: Skica

Odnosno u tablicu Poligoni kod tablice vrhova i poligona možemo upisati 2 4 1. Tako nastavljamo sa poligonom F_2 i pogledamo koji brid mu određuje orijentaciju te skiciramo

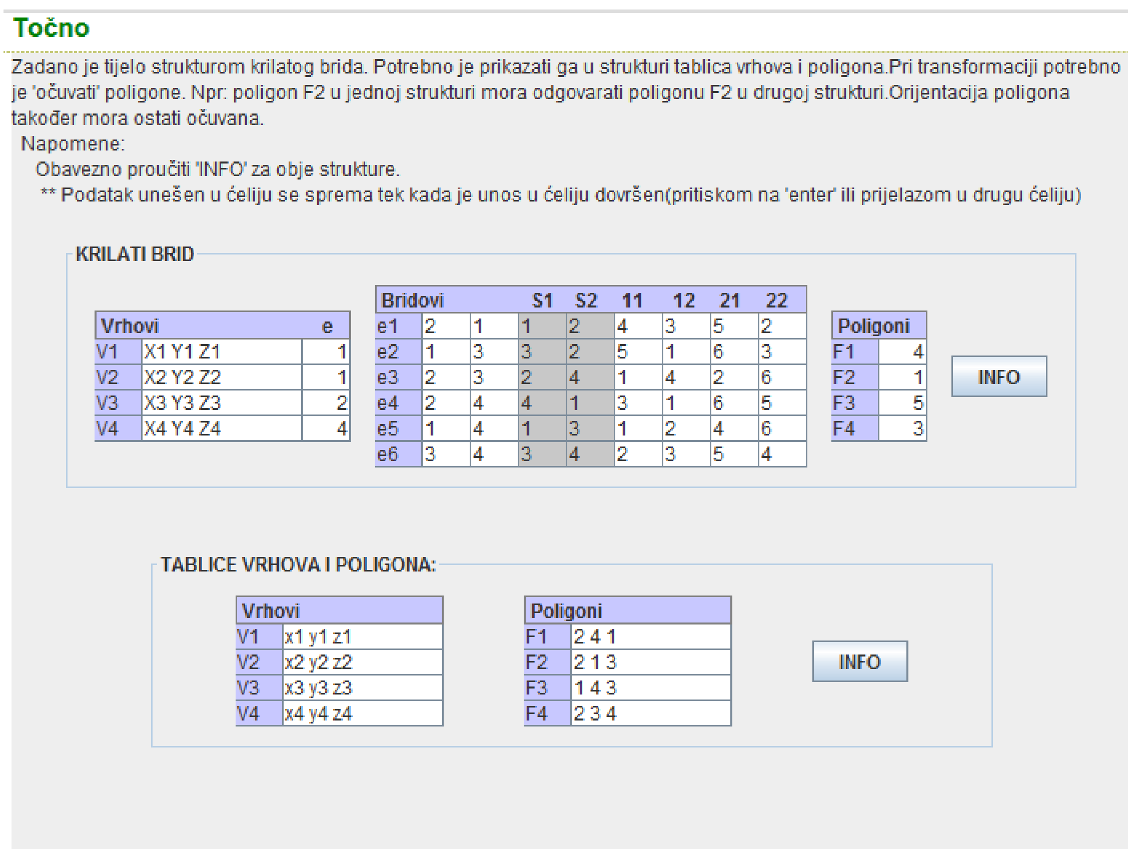


Slika 133: Skica 2

Konačna skica i rješenje



Slika 134: Konačna skica



Točno

Zadano je tijelo strukturom krilatog brida. Potrebno je prikazati ga u strukturi tablica vrhova i poligona.Pri transformaciji potrebno je 'očuvati' poligone. Npr: poligon F2 u jednoj strukturi mora odgovarati poligonu F2 u drugoj strukturi.Orijentacija poligona također mora ostati očuvana.

Napomene:

Obavezno proučiti 'INFO' za obje strukture.

** Podatak unešen u ćeliju se sprema tek kada je unos u ćeliju dovršen(pritiskom na 'enter' ili prijelazom u drugu ćeliju)

KRILATI BRID

Vrhovi		e
V1	X1 Y1 Z1	1
V2	X2 Y2 Z2	1
V3	X3 Y3 Z3	2
V4	X4 Y4 Z4	4

Bridovi			S1	S2	11	12	21	22
e1	2	1	1	2	4	3	5	2
e2	1	3	3	2	5	1	6	3
e3	2	3	2	4	1	4	2	6
e4	2	4	4	1	3	1	6	5
e5	1	4	1	3	1	2	4	6
e6	3	4	3	4	2	3	5	4

Poligoni	
F1	4
F2	1
F3	5
F4	3

INFO

TABLICE VRHOVA I POLIGONA:

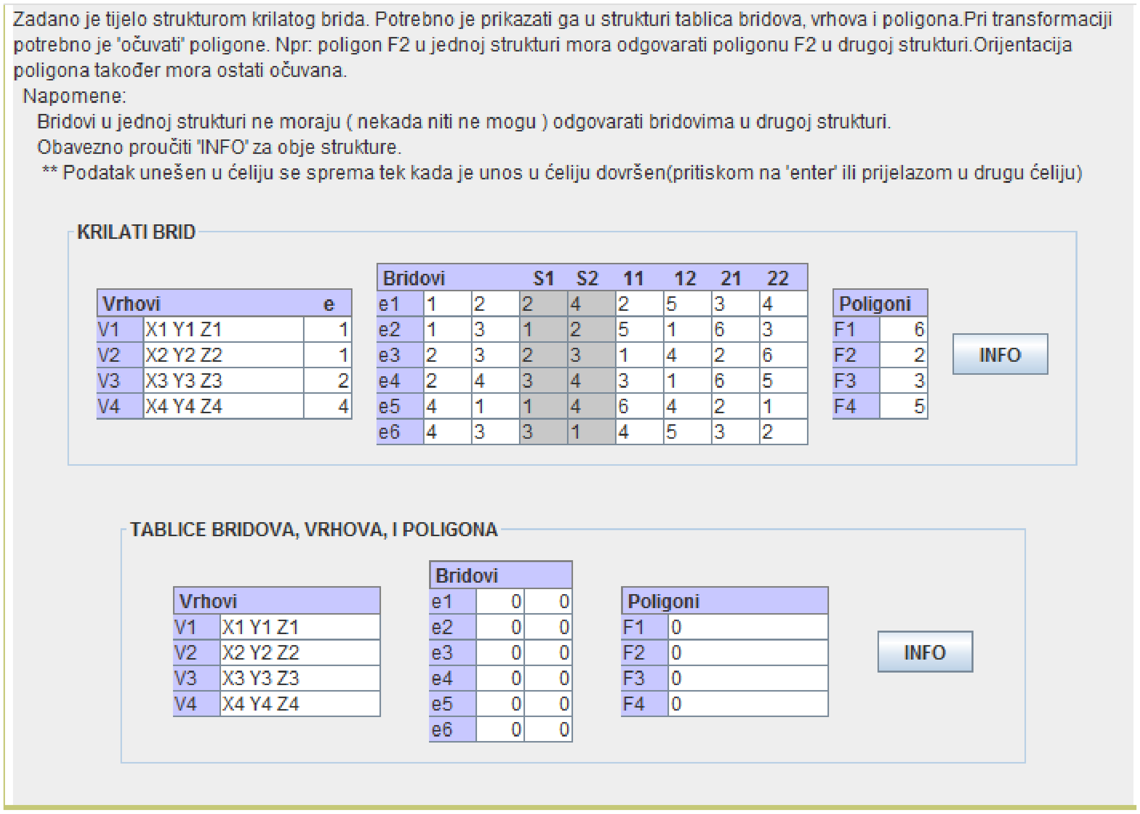
Vrhovi	
V1	x1 y1 z1
V2	x2 y2 z2
V3	x3 y3 z3
V4	x4 y4 z4

Poligoni	
F1	2 4 1
F2	2 1 3
F3	1 4 3
F4	2 3 4

INFO

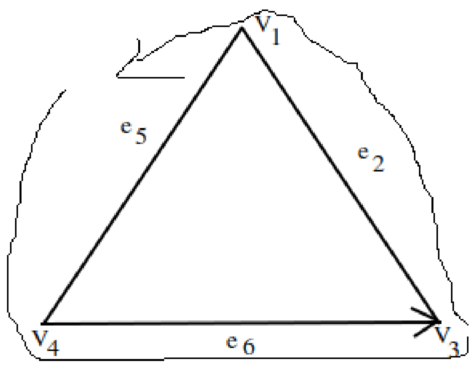
Slika 135: Zadatak 2 riješen

U trećem slučaju imamo tijelo zadano preko **krilatog brida**, a potrebno je odrediti ga pomoću **tablice bridova, vrhova i poligona**. Kao i do sada



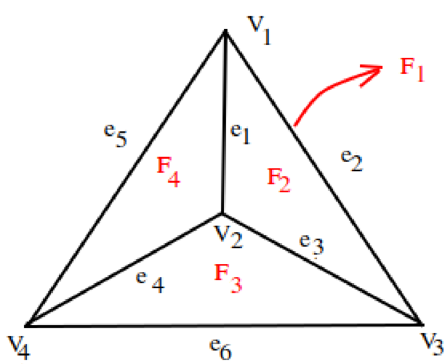
Slika 136: Zadatak 3

krećemo sa skicom poligona F_1. Uvijek čitajte INFO-e u ovom zadatku.

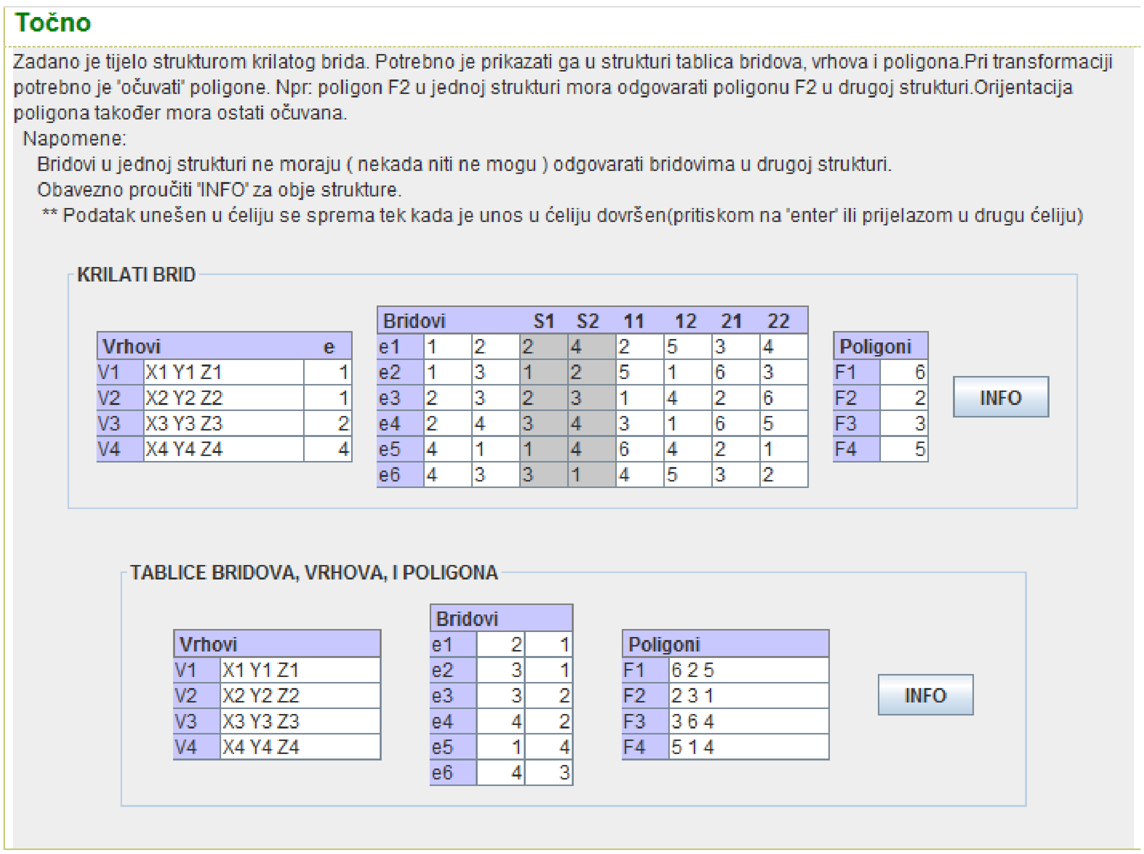


Slika 137: Skica 1

U tablici poligoni kod krilatog brida piše koji brid određuje njegovu orijentaciju. To je brid e_6. U stupcima $S1$ i $S2$ su ostali bridovi koji čine poligon F_1. Zbog toga skica ovako izgleda. Sada u tablicu bridova kod tablice bridova, vrhova i poligona možemo upisati vrhove koji čine poligone e_6, e_2 i e_5. Kako je orijentacija u smjeru CCW, u tablicu poligona možemo upisati 6 2 5. Tako nastavljamo s ostalim poligonima pazeći na orijentacije.



Slika 138: Konačna skica



Točno

Zadano je tijelo strukturom krilatog brida. Potrebno je prikazati ga u strukturi tablica bridova, vrhova i poligona.Pri transformaciji potrebno je 'očuvati' poligone. Npr: poligon F2 u jednoj strukturi mora odgovarati poligonu F2 u drugoj strukturi.Orijentacija poligona također mora ostati očuvana.

Napomene:

Bridovi u jednoj strukturi ne moraju (nekada niti ne mogu) odgovarati bridovima u drugoj strukturi.

Obavezno proučiti 'INFO' za obje strukture.

** Podatak unešen u ćeliju se sprema tek kada je unos u ćeliju dovršen(pritiskom na 'enter' ili prijelazom u drugu ćeliju)

KRILATI BRID

Vrhovi		e
V1	X1 Y1 Z1	1
V2	X2 Y2 Z2	1
V3	X3 Y3 Z3	2
V4	X4 Y4 Z4	4

Bridovi			S1	S2	11	12	21	22
e1	1	2	2	4	2	5	3	4
e2	1	3	1	2	5	1	6	3
e3	2	3	2	3	1	4	2	6
e4	2	4	3	4	3	1	6	5
e5	4	1	1	4	6	4	2	1
e6	4	3	3	1	4	5	3	2

Poligoni	
F1	6
F2	2
F3	3
F4	5

INFO

TABLICE BRIDOVA, VRHOVA, I POLIGONA

Vrhovi	
V1	X1 Y1 Z1
V2	X2 Y2 Z2
V3	X3 Y3 Z3
V4	X4 Y4 Z4

Bridovi		
e1	2	1
e2	3	1
e3	3	2
e4	4	2
e5	1	4
e6	4	3

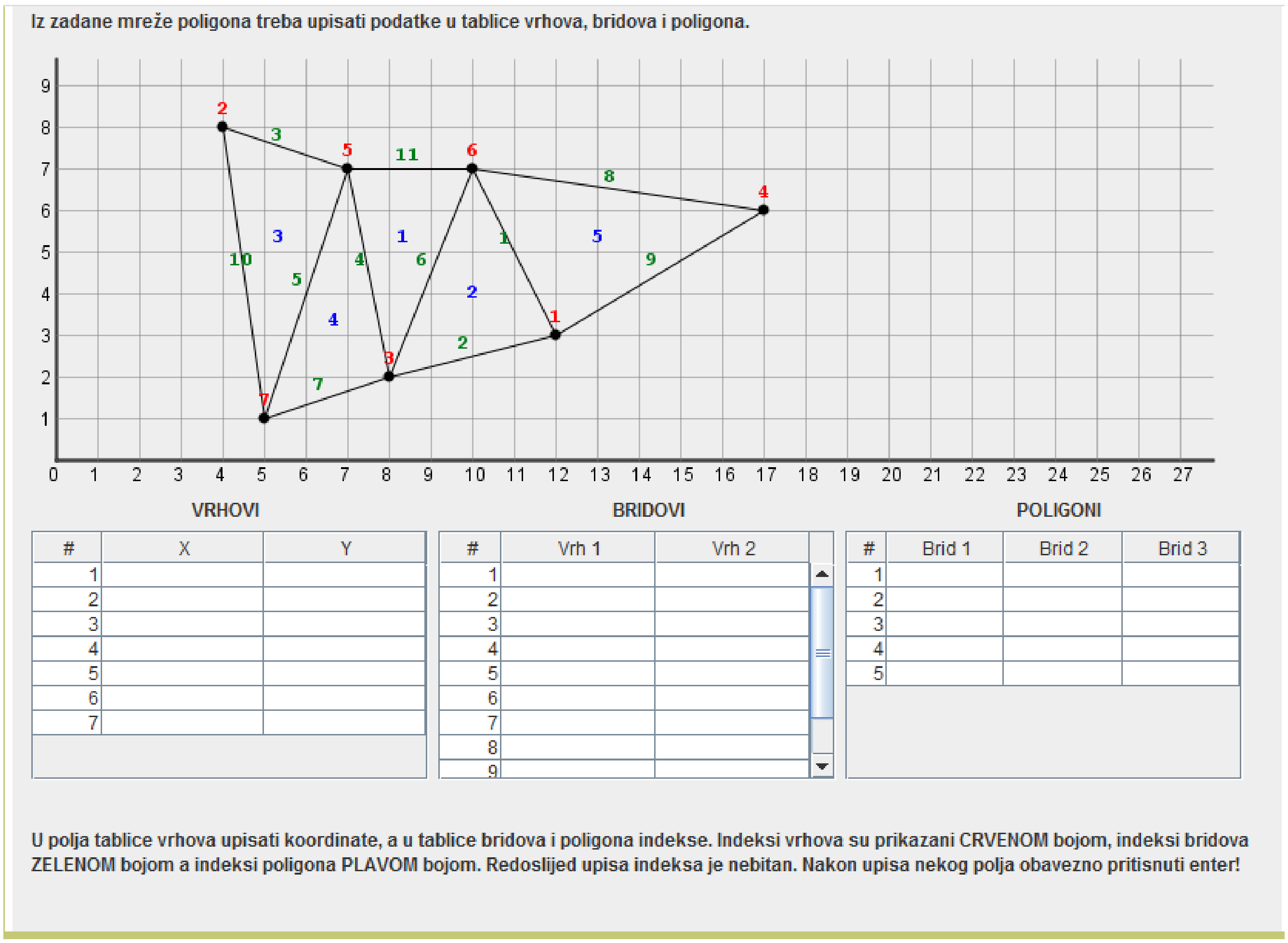
Poligoni	
F1	6 2 5
F2	2 3 1
F3	3 6 4
F4	5 1 4

INFO

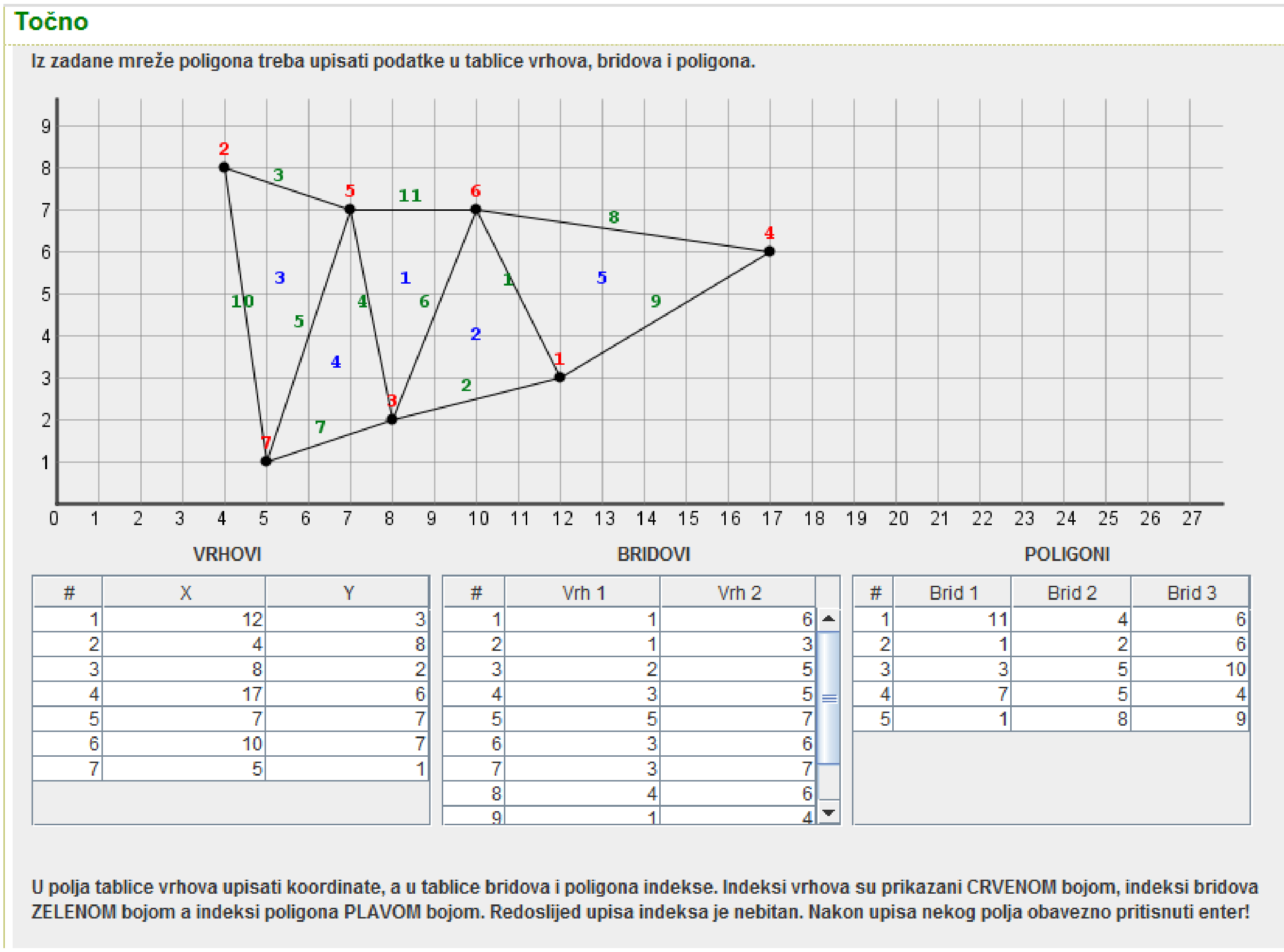
Slika 139: Zadatak 3 riješen

5.2.3 Tablica vrhova, bridova, poligona

Rješenje ovog zadatka je isto i za slučaj više poligona i za slučaj manje poligona. Bitna je samo preciznost. Za podsjetnik što je tablica vrhova, bridova i poligona pogledajte prethodno potpoglavlje 5.2.2.



Slika 140: Zadatak



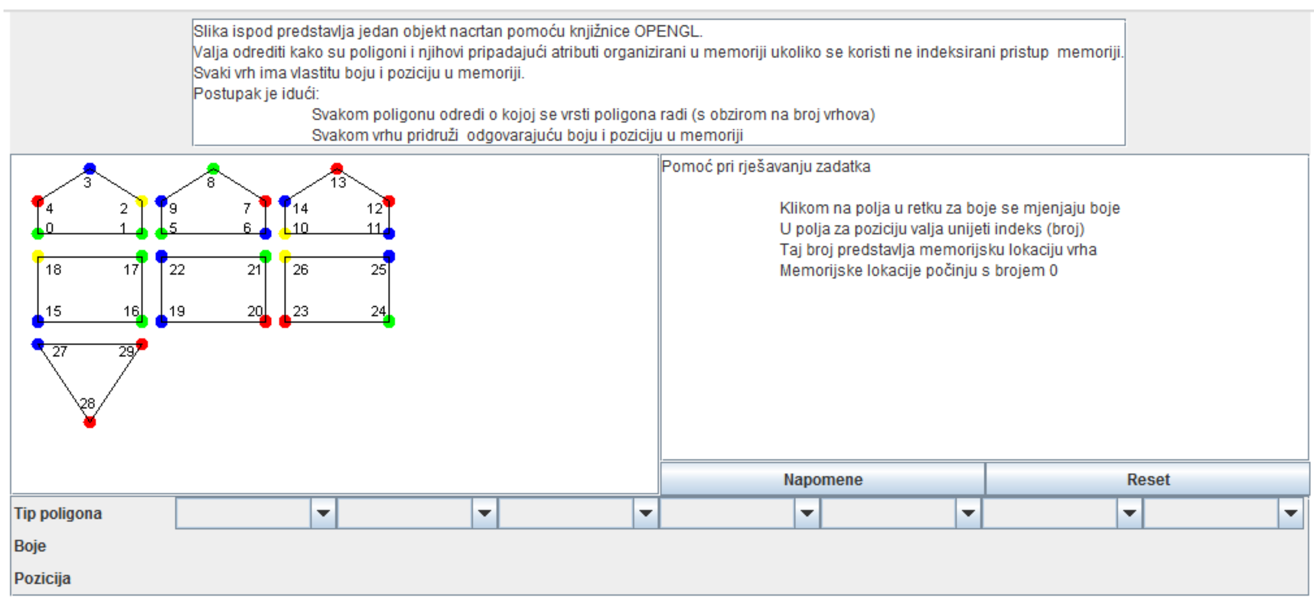
Slika 141: Zadatak riješen

5.2.4 Indeksirani pristup podatcima

Za detaljnija objašnjenja pogledati
http://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/predavanja/5_modeliranje.pdf od slajda 31. Mogu se pojaviti dvije vrste, s indeksiranim i neindenksiranim pristupom memoriji.

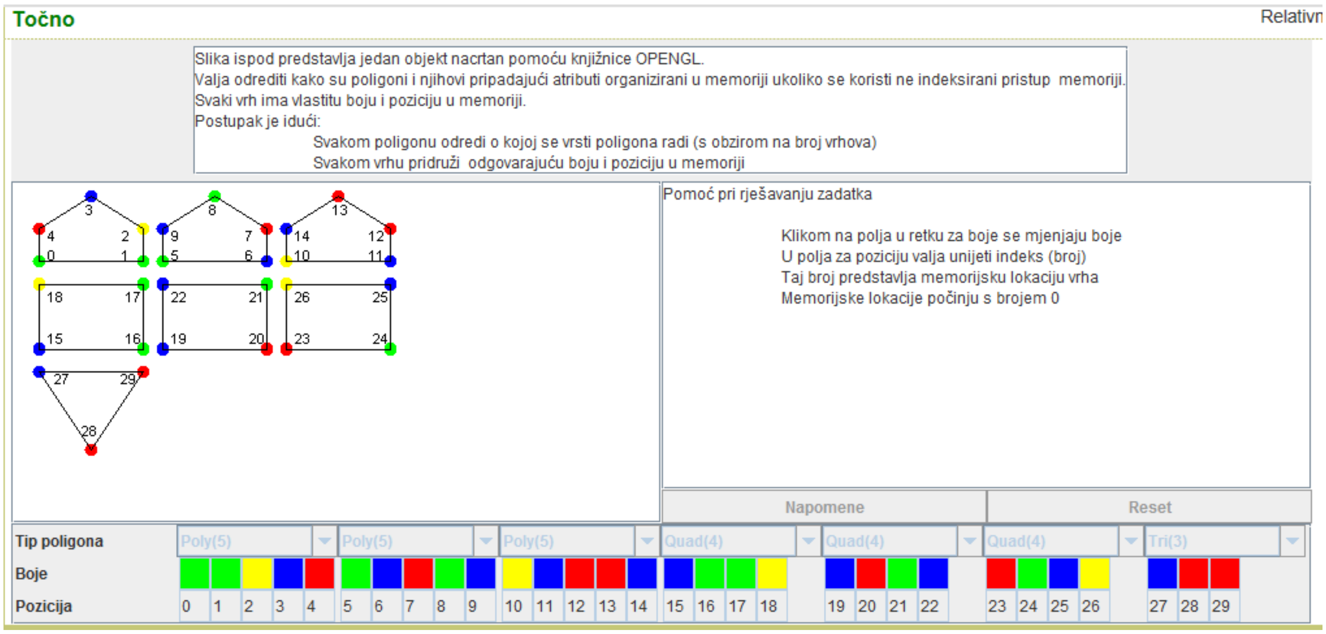
- neindeksirani pristup
  - Svaki vrh svakog poligona je memorijski za sebe
- indeksirani pristup
  - Ako više poligona dijeli isti vrh, taj vrh se memorijski raspodjeljuje

sve će biti jasnije kroz zadatke.



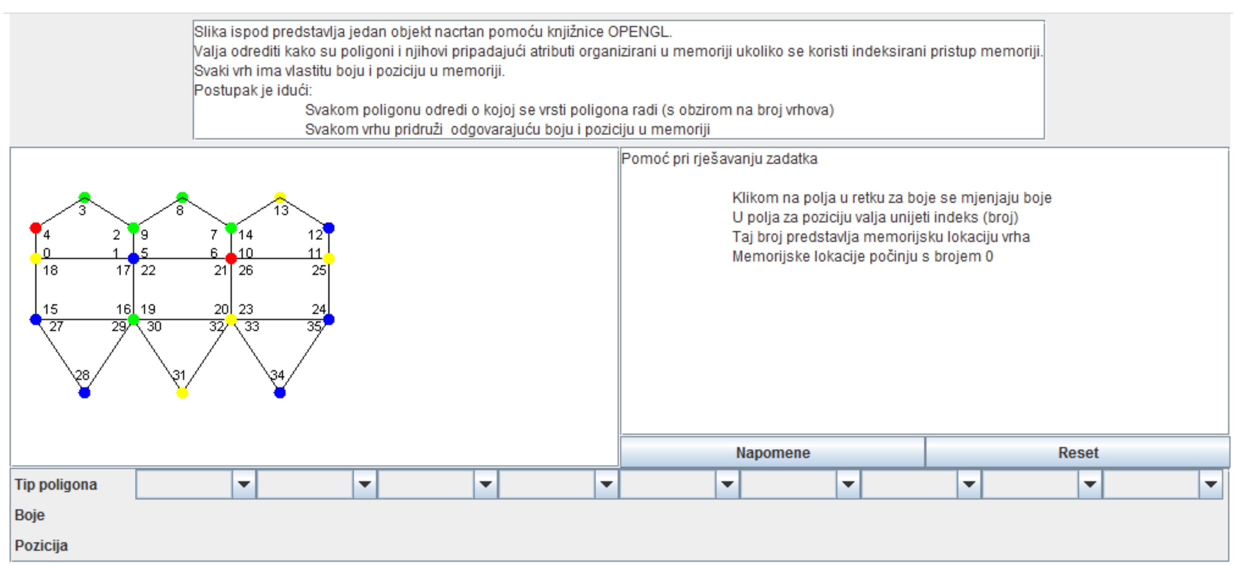
Slika 142: Zadatak 1

Krećemo redom s poligonima, tj. od gornjeg lijevog i upisujemo podatke redom. Koliko ima vrhova, toliko će biti memorijskih lokacija.
Znači za tip poligona prvo odabiremo **Poly(5)** i upisujemo redom boje i vrhove u memorijske lokacije kako jesu.



Slika 143: Zadatak 1 riješen

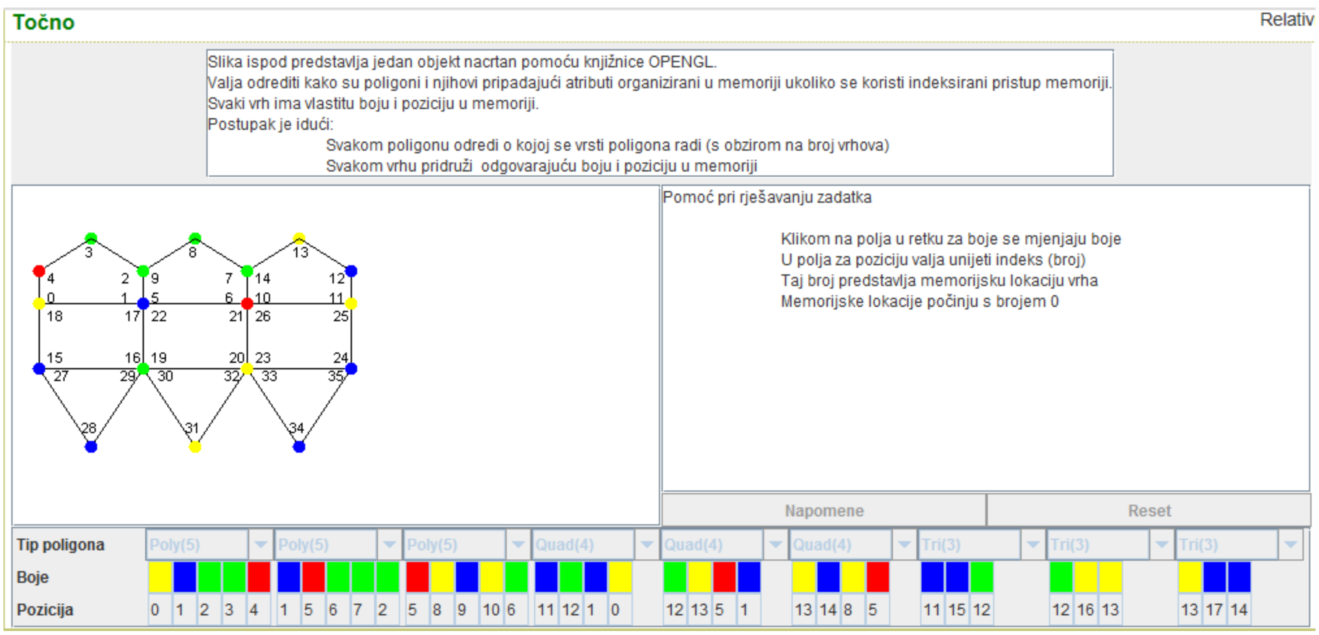
Drugi slučaj, ukoliko se koristi indeksirani pristup, je malo složeniji, ali ne previše.



Slika 144: Zadatak 2

Krećemo od istog poligona (prvog, gornjeg lijevog) i upisujemo redom vrhove kako jesu i njihove respektivne boje. E sad, ovdje je bitno razlikovati indeks vrha od indeksa memorijske lokacije.

Nastavimo s drugim poligonom. Indeks prvog vrha drugog poligona je 5, a on je isti kao i vrh 1 u prvom poligonu. Stoga, umjesto da dodajemo novi vrh, možemo iskoristiti pokazivač na stari vrh i upisati 1 i plavu boju. Nastavimo dalje, vrh 6 se ne dijeli s prethodno incijaliziranim vrhovima stoga njega upisujemo na petu (5) memorijsku lokaciju s crvenom bojom i tako nastavljamo dalje. Sve prethodno definirane vrhove koje neki od poligona dijele će se upisati s postojećom memorijskom lokacijom. Ukupno rješenje bi izgledalo



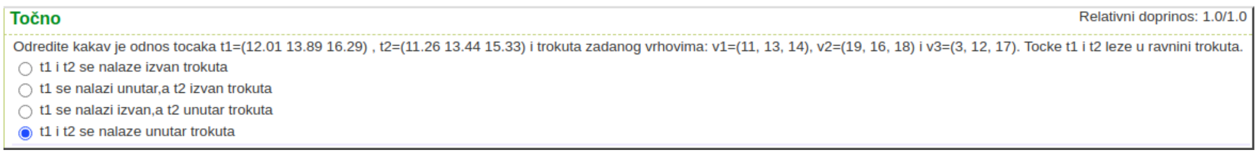
Slika 145: Zadatak 2 riješen

6 Linearna interpolacija i krivulje

6.1 Linearna interpolacija

6.1.1 (3D) Ispitivanje je li točka u trokutu

Rješenje za 2D slučaj možete pronaći ovdje 3.1.3, a princip je isti. Samo što će odmah biti tri jednadžbe s tri nepoznanice. Ali najsigurnije je uzeti dvije od te tri, a treća neka bude da zbroj baricentričnih koordinata jednako 1.


Točno
Relativni doprinos: 1.0/1.0
Odredite kakav je odnos tocaka t1=(12.01 13.89 16.29) , t2=(11.26 13.44 15.33) i trokuta zadanog vrhovima: v1=(11, 13, 14), v2=(19, 16, 18) i v3=(3, 12, 17). Tocke t1 i t2 leze u ravnini trokuta.
- t1 i t2 se nalaze izvan trokuta
- t1 se nalazi unutar,a t2 izvan trokuta
- t1 se nalazi izvan,a t2 unutar trokuta
- t1 i t2 se nalaze unutar trokuta

Slika 146: Zadatak riješen

6.1.2 Bilinearna interpolacija - Jednostavan slučaj, pozitivne vrijednosti

Kako bi se shvatila bilinearna interpolacija, prvo se mora razumjeti linearna interpolacija. Odlično objašnjenje linearne i bilinearne interpolacije možete pronaći u knjizi na stranicama 49. odnosno 59. za bilinearnu.

Ukratko, linearna interpolacija se koristi kada trebamo odrediti vrijednost/i između dvije vrijednosti. Odličan primjer u udžbeniku objašnjava fizikalnu interpretaciju. Ukratko, zamislimo objekt koji se giba duž x-osi te ima početnu poziciju $x_0 = 1$ te krajnju poziciju $x_1 = 6$. Potrebno je umetnuti još 4 točke kako bi se objekt sekvencionalno gibao. Odgovor je jednostavan, to su točke 2, 3, 4 i 5. No da smo htjeli dodati 5 ili 6 točaka, problem bi bio malo teži. Tome služi linearna interpolacija. Matematički ju možemo definirati tako da uvedemo parametar t koji će biti $t \in [0, 1]$. To znači ako je t bliži 0 da je objekt bliži početnoj poziciji x_0. Odnosno ako je t bliži 1 objekt je bliži konačnoj poziciji x_1. Formalno se to može zapisati:

$$x(t) = x_0 + (x_1 - x_0) \cdot t \tag{47}$$

Nakon množenja sa zagradama i grupiranja, može se dobiti sljedeća formula:

$$x(t) = (1 - t) \cdot x_0 + t \cdot x_1 \tag{48}$$

Vidjeli smo da linearna interpolacija se koristi kako bi se interpoliralo između dvije vrijednosti. No kako bismo interpolirali između 4 vrijednosti, koristi se bilinearna interpolacija. To se može tumačiti kao linearna interpolacija linearnih interpolacija, jasnije će biti kroz zadatak.

Odredite parametarski oblik bilinearne interpolacije V(u, v), ako su poznate vrijednosti u točkama:

V(0.00, 0.00) = 8.00
V(1.00, 1.00) = 6.00
V(0.00, 1.00) = 10.00
V(1.00, 0.00) = 1.00

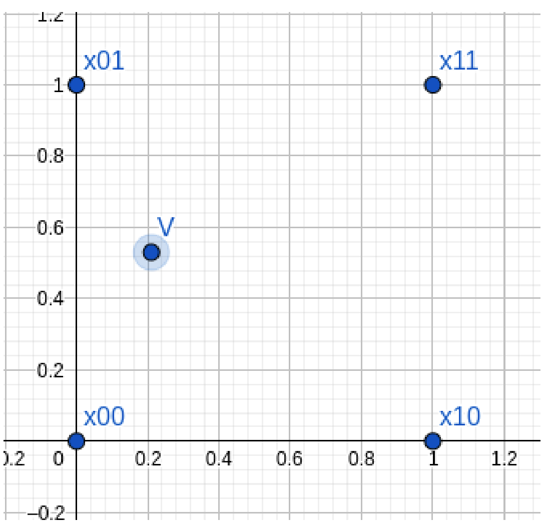
Kolika je vrijednost za V(0.21, 0.53)?

Reset

Napomena: decimalna točka se označava s "." Preciznost unošenja rješenja je 0.30

Slika 147: Zadatak

Slikovito to možemo zamisliti ovako



Slika 148: Slikovit prikaz

Pri čemu je

$$x_{00} = 8$$

$$x_{11} = 6$$

$$x_{01} = 10$$

$$x_{10} = 1$$

$$u = 0.21$$

$$v = 0.53$$

$$V(u, v)$$

Prvo ćemo napraviti horizontalnu linearnu interpolaciju za vrijednosti gdje je $v = 0$. Odnosno

$$V(u, 0) = (1 - u) \cdot x_{00} + u \cdot x_{10}$$

$$= (1 - u) \cdot 8 + u \cdot 1 = 8 - 7u$$

Nakon toga radimo horizontalnu linearnu interpolaciju gdje je $v = 1$

$$V(u, 1) = (1 - u) \cdot x_{01} + u \cdot x_{11}$$

$$= 10 - 4u$$

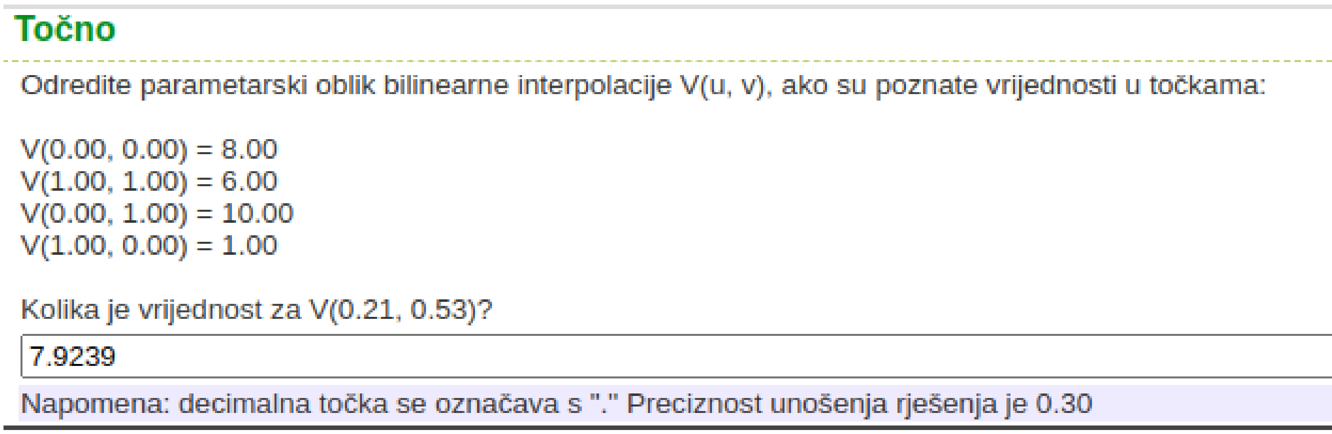
Na kraju radimo linearnu interpolaciju po vertikali između upravo dobivenih $V(u, 0)$ i $V(u, 1)$.

$$V(u, v) = (1 - v) \cdot V(u, 0) + v \cdot V(u, 1)$$

Kada uvrstimo u i v, dobije se

$$V(0.21, 0.53) = (1 - 0.53) \cdot (8 - 7 \cdot 0.21) + 0.53 \cdot (10 - 4 \cdot 0.21)$$

$$= 7.9239$$



Točno

Odredite parametarski oblik bilinearne interpolacije V(u, v), ako su poznate vrijednosti u točkama:

V(0.00, 0.00) = 8.00
V(1.00, 1.00) = 6.00
V(0.00, 1.00) = 10.00
V(1.00, 0.00) = 1.00

Kolika je vrijednost za V(0.21, 0.53)?

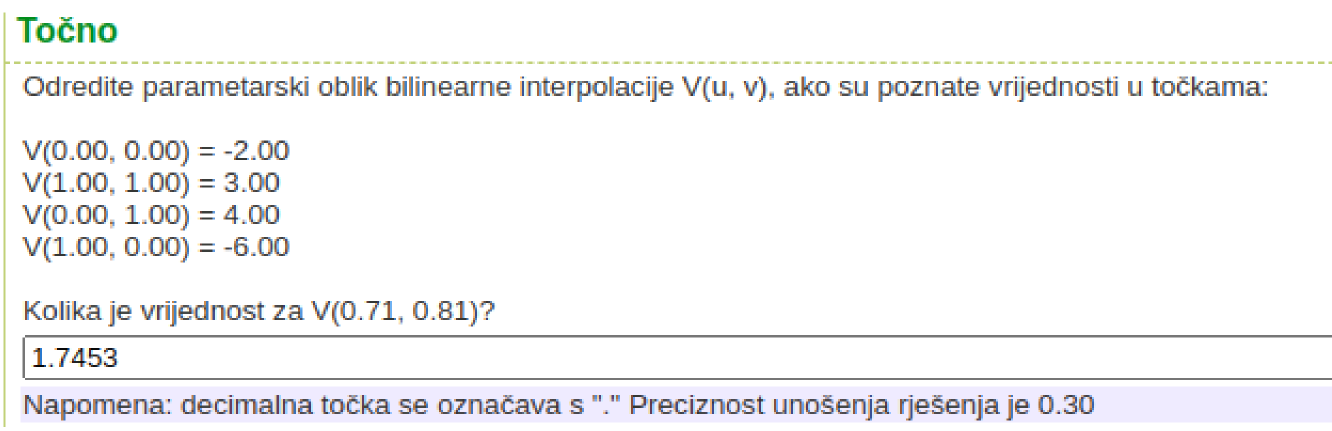
7.9239

Napomena: decimalna točka se označava s "." Preciznost unošenja rješenja je 0.30

Slika 149: Zadatak riješen

6.1.3 Bilinearna interpolacija - Jednostavan slučaj, moguće negativne vrijednosti

Zadatak se rješava isto kao i prethodni 6.1.2.



Točno

Odredite parametarski oblik bilinearne interpolacije V(u, v), ako su poznate vrijednosti u točkama:

V(0.00, 0.00) = -2.00
V(1.00, 1.00) = 3.00
V(0.00, 1.00) = 4.00
V(1.00, 0.00) = -6.00

Kolika je vrijednost za V(0.71, 0.81)?

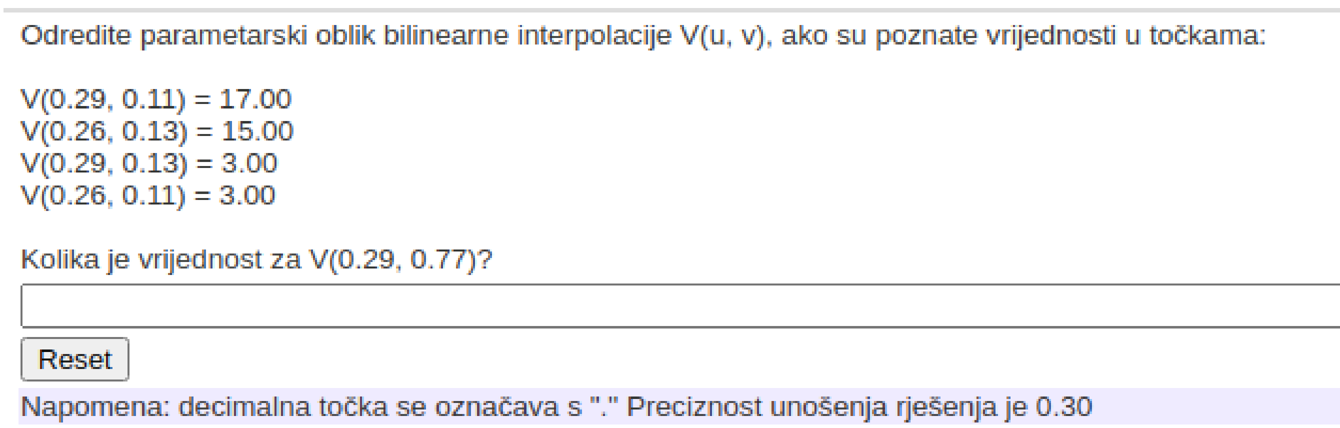
1.7453

Napomena: decimalna točka se označava s "." Preciznost unošenja rješenja je 0.30

Slika 150: Zadatak riješen

6.1.4 Bilinearna interpolacija - Složeniji slučaj

Za složeniji slučaj nisam uspio naći dobro objašnjenje pa će biti prikazana formula koja se koristi i uvrštavanje u istu. Koncept je donekle sličan.



Slika 151: Zadatak

Rješavamo na isti način kao i prethodna dva slučaja. Prvo horizontalno kad je $v = 0$, odnosno u ovom slučaju $v = y_0 = 0.11$. Označimo

$$x_{00} = V(0.26, 0.11) = 3$$

$$x_{01} = V(0.26, 0.13) = 15$$

$$x_{10} = V(0.29, 0.11) = 17$$

$$x_{11} = V(0.29, 0.13) = 3$$

$$u = 0.29$$

$$v = 0.77$$

$$V(u, v)$$

Formula glasi

$$V(u, y_0) = \frac{x_1 - u}{x_1 - x_0} \cdot x_{00} + \frac{u - x_0}{x_1 - x_0} \cdot x_{10}$$

gdje y_0 predstavlja najmanji y koji se pojavljuje u zadatku (u ovom zadatku su y-oni jednaki 0.11 i 0.13).

x_0 predstavlja najmanji x, a x_1 predstavlja najveći x. Odnosno $x_0 = 0.26$, $x_1 = 0.29$.
Kada uvrstimo sve brojeve u formulu, dobije se:

$$V(0.77, 0.11) = \frac{0.29 - 0.29}{0.29 - 0.26} \cdot 3 + \frac{0.29 - 0.26}{0.29 - 0.26} \cdot 17 = 17$$

Sada računamo ponovno po horizontali, ali kada je $v = y_1 = 0.13$

$$V(u, y_1) = \frac{x_1 - u}{x_1 - x_0} \cdot x_{01} + \frac{u - x_0}{x_1 - x_0} \cdot x_{11}$$

Odnosno, kad uvrstimo brojeve

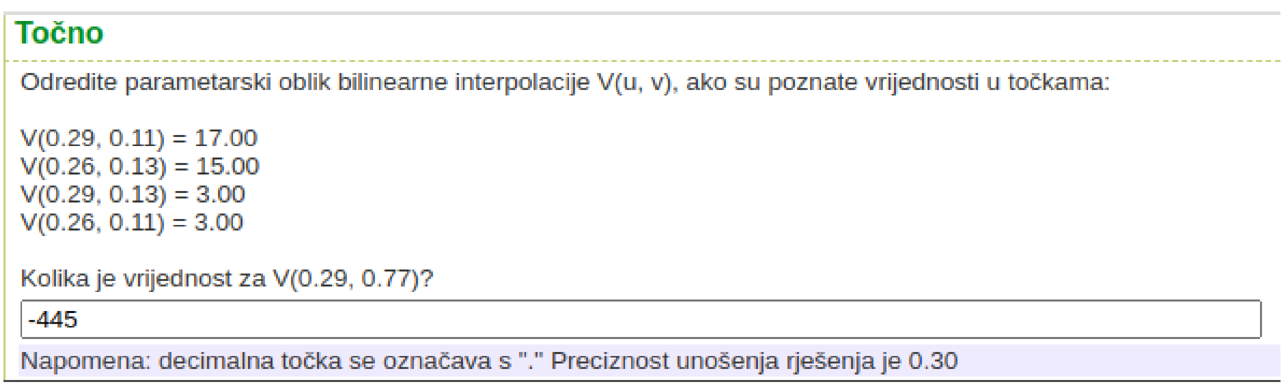
$$V(0.29, 0.13) = \frac{0.29 - 0.29}{0.29 - 0.26} \cdot 15 + \frac{0.29 - 0.26}{0.29 - 0.26} \cdot 3 = 3$$

Te na kraju radimo vertikalnu linearnu interpolaciju

$$V(u, v) = \frac{y_1 - v}{y_1 - y_0} \cdot V(u, y_0) + \frac{v - y_0}{y_1 - y_0} \cdot V(u, y_1)$$

Odnosno kada uvrstimo brojeve

$$V(0.29, 0.77) = \frac{0.13 - 0.77}{0.13 - 0.11} \cdot 17 + \frac{0.77 - 0.11}{0.13 - 0.11} \cdot 3 = -445$$



Točno

Odredite parametarski oblik bilinearne interpolacije V(u, v), ako su poznate vrijednosti u točkama:

V(0.29, 0.11) = 17.00
V(0.26, 0.13) = 15.00
V(0.29, 0.13) = 3.00
V(0.26, 0.11) = 3.00

Kolika je vrijednost za V(0.29, 0.77)?

-445

Napomena: decimalna točka se označava s "." Preciznost unošenja rješenja je 0.30

Slika 152: Zadatak riješen

6.1.5 Određivanje baricentričnih koordinata

Zadatak se rješava isto kao i 3.1.3.

Točno

Zadan je trokut V1=(-3, -5, -2), V2=(-2, 3, -5), V3=(-1, -5, -4). Odredite baricentrične koordinate za točku P=(-1.3, -6.05, -3.45) koja leži u ravnini trokuta.

t1: 0.214

t2: -0.13

t3: 0.918

Preciznost unošenja rješenja je 0.05.

Dobro pazite na redslijed vrhova.

Slika 153: Zadatak 1 riješen

Ako dobijete da jednadžba nema rješenja, onda je preporuka riješiti na jedan od drugih načina ponuđenih u knjizi.

Zadan je trokut V1=(-4, -2, -2), V2=(-3, -1, 0), V3=(-2, -2, -4). Odredite baricentrične koordinate za točku P=(-2.2, -1.1, -1) koja leži u ravnini trokuta.

t1: -0.36

t2: 0.93

t3: 0.43

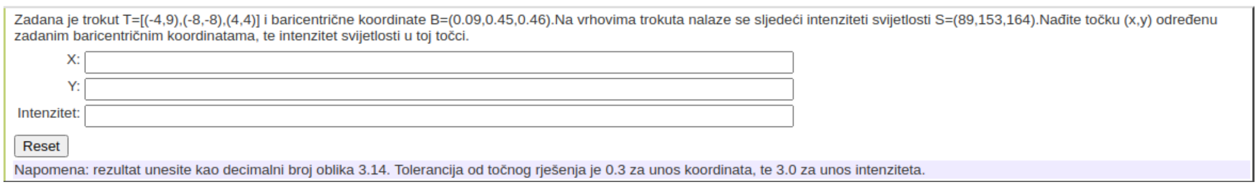
Preciznost unošenja rješenja je 0.05.

Dobro pazite na redslijed vrhova.

Slika 154: Zadatak 2 riješen

6.1.6 Interpolacija baricentričnim koordinatama - Vrijednosti su skalari

Za podsjetnik o baricentričnim posjeti 3.1.3.


Zadana je trokut T=[(-4,9),(-8,-8),(4,4)] i baricentrične koordinate B=(0.09,0.45,0.46).Na vrhovima trokuta nalaze se sljedeći intenziteti svijetlosti S=(89,153,164).Nađite točku (x,y) određenu zadanim baricentričnim koordinatama, te intenzitet svijetlosti u toj točci.

X:

Y:

Intenzitet:

Reset

Napomena: rezultat unesite kao decimalni broj oblika 3.14. Tolerancija od točnog rješenja je 0.3 za unos koordinata, te 3.0 za unos intenziteta.

Slika 155: Zadatak

Prvo ćemo odrediti točku preko zadanog trokuta i baricentričnih koordinata. To se radi jednostavno uvrštavajući u formulu 8. Konkretno

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.09 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix} + 0.45 \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix} + 0.46 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

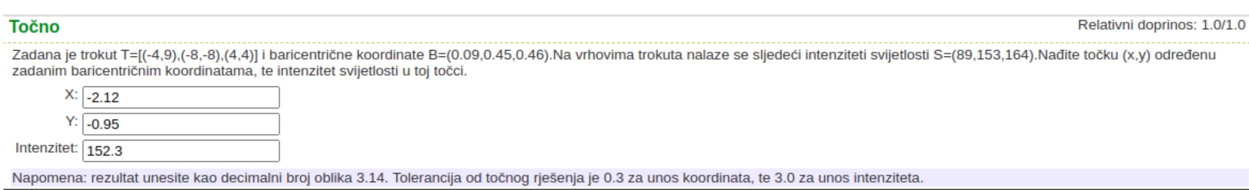
Za rješenje se dobije točka $T(-2.12, -0.95)$

Kako bismo odredili intenzitet u toj točki, možemo se poslužiti činjenicom da se pomoću baricentričnih koordinata može vršiti i interpolacija (jer je zbroj težinskih funkcija $= 1$).

$$I = t_1 \cdot I_1 + t_2 \cdot I_2 + t_3 \cdot I_3$$

$$I = 0.09 \cdot 89 + 0.45 \cdot 153 + 0.46 \cdot 164 = 152.3$$

Iz ovoga se može vidjeti da .vrh V_1 intenziteta $I_1 = 89$ djeluje 9% ($t_1 = 0.09$) na točku T. Vrh V_2 intenziteta $I_2 = 153$ djeluje 45%. Itd...


Točno

Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadana je trokut T=[(-4,9),(-8,-8),(4,4)] i baricentrične koordinate B=(0.09,0.45,0.46).Na vrhovima trokuta nalaze se sljedeći intenziteti svijetlosti S=(89,153,164).Nađite točku (x,y) određenu zadanim baricentričnim koordinatama, te intenzitet svijetlosti u toj točci.

X: -2.12

Y: -0.95

Intenzitet: 152.3

Napomena: rezultat unesite kao decimalni broj oblika 3.14. Tolerancija od točnog rješenja je 0.3 za unos koordinata, te 3.0 za unos intenziteta.

Slika 156: Zadatak riješen

6.1.7 Interpolacija baricentričnim koordinatama - Vrijednosti su vektori

Za podsjetnik o braicentričnim koordinatama posjeti 3.1.3.

Do sada su u zadacima sa interpolacijom vrijednosti koje smo interpolirali bile skalari, a sada su vektori. Općenito vektor možemo zapisati kao:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} \tag{49}$$

gdje su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ jedinični okomiti vektori. Što bi onda bila interpolacija između dva vektora? To bi bila interpolacija svake komponente zasebno. Odnosno ako želimo vektor $\vec{v}$ koji je između dva vektora $\vec{v_0}$ i $\vec{v_1}$:

$$\vec{v}(t) = (1-t) \cdot \vec{v_0} + t \cdot \vec{v_1}$$

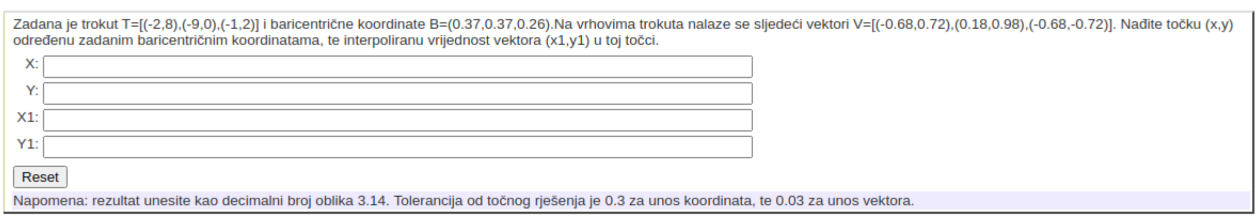
gdje je

$$\vec{v}(t) = v_x(t) \cdot \vec{i} + v_y(t) \cdot \vec{j}$$

a gdje su

$$v_x(t) = (1-t) \cdot v_{0,x} + t \cdot v_{1,x}$$

$$v_y(t) = (1-t) \cdot v_{0,y} + t \cdot v_{1,y}$$



Slika 157: Zadatak

Ovaj zadatak je dosta sličan prethodnom 6.1.6. Točka određena baricentričnim koordinatama se računa kao u prethodnom zadatku.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.37 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix} + 0.37 \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.26 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Odakle se dobije

$$x = -4.33$$

$$y = 3.48$$

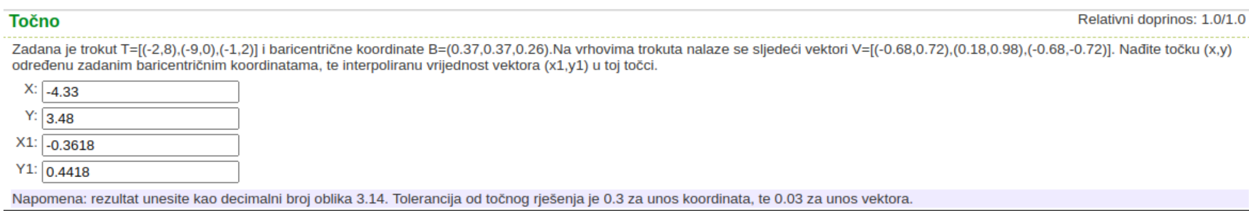
Sada, umjesto intenziteta u vrhu imamo zadane vektore u vrhu. Stoga ćemo za svaku komponentu vektora u vrhovima odrediti interpoliranu vrijednost vektora u dobivenoj točki (x, y).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 0.37 \cdot \begin{bmatrix} -0.68 \\ 0.72 \end{bmatrix} + 0.37 \cdot \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.98 \end{bmatrix} + 0.26 \cdot \begin{bmatrix} -0.68 \\ -0.72 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -0.3618$$

$$y_1 = 0.4418$$

Vektor u prvom vrhu na točku (x, y) djeluje 37% ($t_1 = 0.37$),...


Točno

Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadana je trokut T=[(-2,8),(-9,0),(-1,2)] i baricentrične koordinate B=(0.37,0.37,0.26).Na vrhovima trokuta nalaze se sljedeći vektori V=[(-0.68,0.72),(0.18,0.98),(-0.68,-0.72)]. Nađite točku (x,y) određenu zadanim baricentričnim koordinatama, te interpoliranu vrijednost vektora (x1,y1) u toj točci.

X: -4.33

Y: 3.48

X1: -0.3618

Y1: 0.4418

Napomena: rezultat unesite kao decimalni broj oblika 3.14. Tolerancija od točnog rješenja je 0.3 za unos koordinata, te 0.03 za unos vektora.

Slika 158: Zadatak riješen

6.2 Segment krivulje

6.2.1 Interpolacijska Bezierova krivulja - Kvadratna krivulja, zadane točke, traže se točke

Video objašnjenje za Bezierove krivulje dobivene De Casteljauovim algoritmom možete pronaći ovdje https://www.youtube.com/watch?v=pnYccz1Ha34. Osim toga, dodatna objašnjenja možete pronaći i u knjizi od stranice 151.

Krivulje su najčešće zadane nizom točaka

Postoje dvije vrste Bezierovih krivulja, a to su interpolacijske i aproksimacijske.

Interpolacijske Bezierove krivulje prolaze kroz sve točke koje su zadane.

Aproksimacijske Bezierove krivulje prolaze najčešće kroz početnu i završnu točku, a kroz ostale samo aproksimativno blizu njih.

Koristeći Bernsteinove težinske funkcije dobijemo aproksimacijsku Bezierovu krivulju.

Težinska funkcija nam govori koliko pojedina točka djeluje na krivulju.

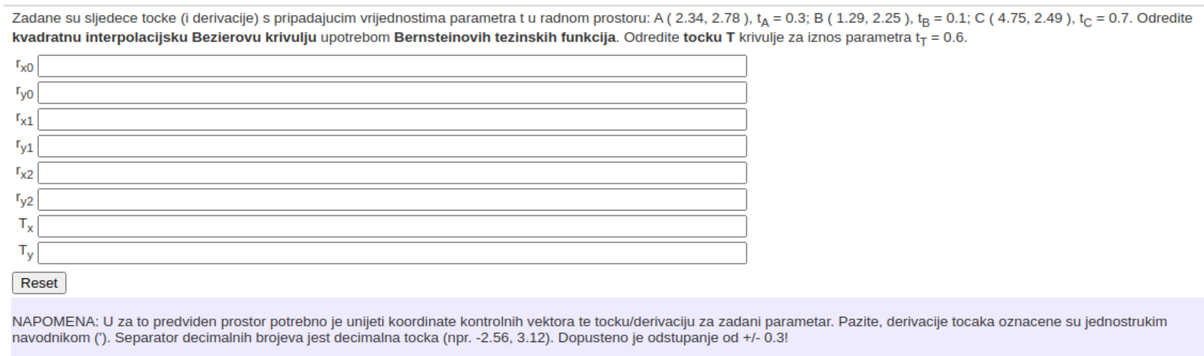
Bernsteinove težinske funkcije su oblika

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{r_i} \cdot b_{i,n}(t) \tag{50}$$

gdje je $\vec{r_i}$ radij vektor točke (točka koja je prikazana kao vektor), $\vec{p}(t)$ je točka na krivulji, a $b_{i,n}(t)$ su težinske funkcije koje imaju oblik

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \tag{51}$$

gdje n predstavlja stupanj krivulje. Ako u zadacima nije zadan stupanj krivulje, onda je on jednak broju točaka koje određuju krivulju - 1. t je parametar za koji vrijedi $t \in [0,1]$.
Za interpolacijske krivulje posjetiti knjigu od stranice 162.



Zadane su sljedece tocke (i derivacije) s pripadajucim vrijednostima parametra t u radnom prostoru: A (2.34, 2.78), t_A = 0.3; B (1.29, 2.25), t_B = 0.1; C (4.75, 2.49), t_C = 0.7. Odredite **kvadratnu interpolacijsku Bezierovu krivulju** upotrebom **Bernsteinovih tezinskih funkcija**. Odredite **tocku T** krivulje za iznos parametra t_T = 0.6.

r_{x0}

r_{y0}

r_{x1}

r_{y1}

r_{x2}

r_{y2}

T_x

T_y

Reset

NAPOMENA: U za to predviden prostor potrebno je unijeti koordinate kontrolnih vektora te tocku/derivaciju za zadani parametar. Pazite, derivacije tocaka oznacene su jednostrukim navodnikom ('). Separator decimalnih brojeva jest decimalna tocka (npr. -2.56, 3.12). Dopusteno je odstupanje od +/- 0.3!

Slika 159: Zadatak

Prva stvar koju je potrebno primijetiti u zadatku je ta da se radi o kvadratnoj **interpolacijskoj** krivulji. To znači da točke A, B i C leže na krivulji, a određene su preko svojih parametara t respektivno.

Pošto se radi o kvadratnoj Bezierovoj funkciji, stupanj joj je 2. Točnije $n = 2$. Krenimo redom s formulom 50. Točke koje leže na krivulji ($\vec{p}(t)$) imamo, n znamo, $\vec{r_i}$-ove trebamo izračunati te su nam još potrebne težinske funkcije. One se računaju prema formuli 51 te su jednake:

$$b_{0,2} = (1-t)^2$$

$$b_{1,2} = 2 \cdot t \cdot (1-t)$$

$$b_{2,2} = t^2$$

Počnimo uvrštavati u formulu 50.

$$\vec{A}(t_A) = \vec{r_0} \cdot b_{0,2} + \vec{r_1} \cdot b_{1,2} + \vec{r_2} \cdot b_{2,2}$$

Isto vrijedi i za ostale točke

$$\begin{bmatrix} 2.34 \\ 2.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x0} \\ r_{y0} \end{bmatrix} \cdot (1-0.3)^2 + \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot 0.3 \cdot (1-0.3) + \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \end{bmatrix} \cdot 0.3^2$$

$$\begin{bmatrix} 1.29 \\ 2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x0} \\ r_{y0} \end{bmatrix} \cdot (1-0.1)^2 + \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot 0.1 \cdot (1-0.1) + \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \end{bmatrix} \cdot 0.1^2$$

$$\begin{bmatrix} 4.75 \\ 2.49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x0} \\ r_{y0} \end{bmatrix} \cdot (1-0.7)^2 + \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot 0.7 \cdot (1-0.7) + \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \end{bmatrix} \cdot 0.7^2$$

Dobije se sustav jednadžbi koji se riješi. Prva jednadžba bi izgledala (analogno se ispišu i ostale)

$$2.34 = 0.49r_{x0} + 0.42r_{x1} + 0.09r_{x2}$$

Te se za rješenja dobije:

$$r_{x0} = 0.8038 \qquad r_{y0} = 1.8163$$

$$r_{x1} = 3.1704 \qquad r_{y1} = 4.2663$$

$$r_{x2} = 6.8288 \qquad r_{y2} = 1.0913$$

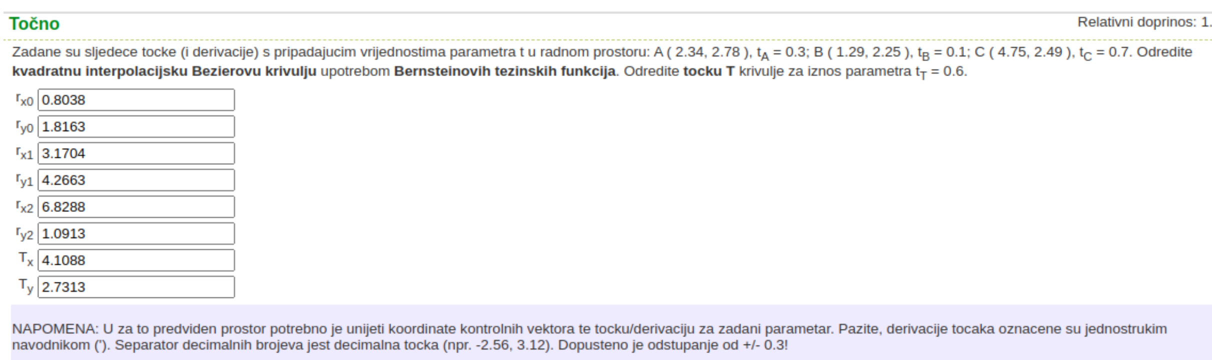
To sad znači da imamo krivulju koja izgleda:

$$\vec{p}(t) = \begin{bmatrix} 0.8038 \\ 1.8163 \end{bmatrix} \cdot (1-t)^2 + \begin{bmatrix} 3.1704 \\ 4.2663 \end{bmatrix} \cdot 2 \cdot t \cdot (1-t) + \begin{bmatrix} 6.8288 \\ 1.0913 \end{bmatrix} \cdot t^2$$

Kako bismo odredili točku T s parametrom $t_T = 0.6$ dovoljno je da 0.6 uvrstimo umjesto t u prethodno dobivenu jednadžbu krivulje. Za rješenje se dobije

$$T_x = 4.1088$$

$$T_y = 2.7313$$



Točno

Relativni doprinos: 1.(

Zadane su sljedece tocke (i derivacije) s pripadajucim vrijednostima parametra t u radnom prostoru: A (2.34, 2.78), t_A = 0.3; B (1.29, 2.25), t_B = 0.1; C (4.75, 2.49), t_C = 0.7. Odredite **kvadratnu interpolacijsku Bezierovu krivulju** upotrebom **Bernsteinovih tezinskih funkcija**. Odredite **tocku T** krivulje za iznos parametra t_T = 0.6.

r_{x0} 0.8038

r_{y0} 1.8163

r_{x1} 3.1704

r_{y1} 4.2663

r_{x2} 6.8288

r_{y2} 1.0913

T_x 4.1088

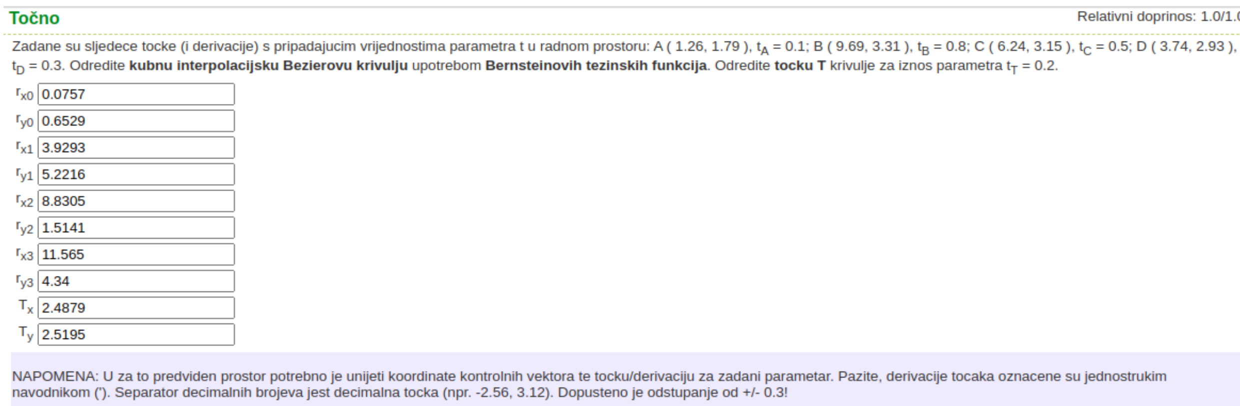
T_y 2.7313

NAPOMENA: U za to predviden prostor potrebno je unijeti koordinate kontrolnih vektora te tocku/derivaciju za zadani parametar. Pazite, derivacije tocaka oznacene su jednostrukim navodnikom ('). Separator decimalnih brojeva jest decimalna tocka (npr. -2.56, 3.12). Dopusteno je odstupanje od +/- 0.3!

Slika 160: Zadatak riješen

6.2.2 Interpolacijska Bezierova krivulja - Kvadratna krivulja, zadane derivacije, traže se točke

U ovom zadatku je jedina razlika ta što krivulja nije kvadratna nego kubna. To znači da je $n = 3$ i to je jedina razlika. Podsjetnik za prethodni zadatak 6.2.1.


Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadane su sljedece tocke (i derivacije) s pripadajucim vrijednostima parametra t u radnom prostoru: A (1.26, 1.79), t_A = 0.1; B (9.69, 3.31), t_B = 0.8; C (6.24, 3.15), t_C = 0.5; D (3.74, 2.93), t_D = 0.3. Odredite **kubnu interpolacijsku Bezierovu krivulju** upotrebom **Bernsteinovih tezinskih funkcija**. Odredite **tocku T** krivulje za iznos parametra t_T = 0.2.

r_{x0} 0.0757
r_{y0} 0.6529
r_{x1} 3.9293
r_{y1} 5.2216
r_{x2} 8.8305
r_{y2} 1.5141
r_{x3} 11.565
r_{y3} 4.34
T_x 2.4879
T_y 2.5195

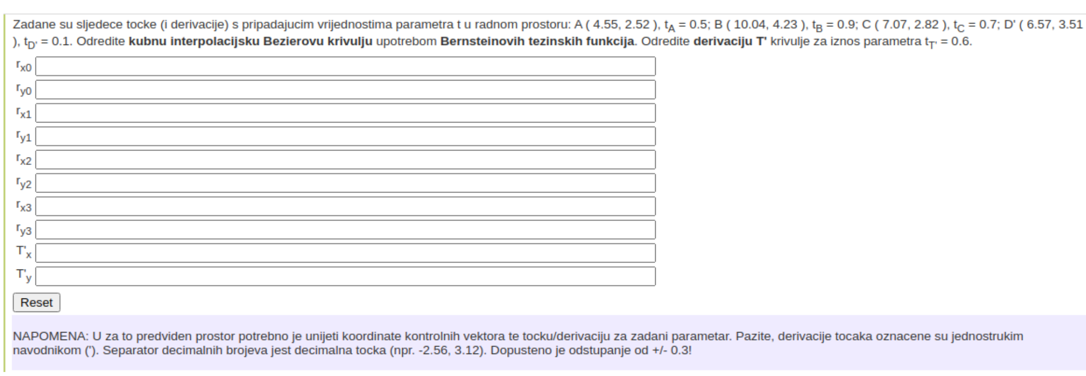
NAPOMENA: U za to predviden prostor potrebno je unijeti koordinate kontrolnih vektora te tocku/derivaciju za zadani parametar. Pazite, derivacije tocaka oznacene su jednostrukim navodnikom ('). Separator decimalnih brojeva jest decimalna tocka (npr. -2.56, 3.12). Dopusteno je odstupanje od +/- 0.3!

Slika 161: Zadatak riješen

P.S. Nisam dobio ni jedan zadatak u kojem su zadane derivacije.

6.2.3 Interpolacijska Bezierova krivulja - Kvadratna krivulja, zadane točke i derivacije, traže se točke ili derivacije

Podsjetnik za Bezierove krivulje 6.2.1.


Zadane su sljedece tocke (i derivacije) s pripadajucim vrijednostima parametra t u radnom prostoru: A (4.55, 2.52), t_A = 0.5; B (10.04, 4.23), t_B = 0.9; C (7.07, 2.82), t_C = 0.7; D' (6.57, 3.51), $t_{D'}$ = 0.1. Odredite **kubnu interpolacijsku Bezierovu krivulju** upotrebom **Bernsteinovih tezinskih funkcija**. Odredite **derivaciju T'** krivulje za iznos parametra $t_{T'}$ = 0.6.

r_{x0}
r_{y0}
r_{x1}
r_{y1}
r_{x2}
r_{y2}
r_{x3}
r_{y3}
T'_x
T'_y

Reset

NAPOMENA: U za to predviden prostor potrebno je unijeti koordinate kontrolnih vektora te tocku/derivaciju za zadani parametar. Pazite, derivacije tocaka oznacene su jednostrukim navodnikom ('). Separator decimalnih brojeva jest decimalna tocka (npr. -2.56, 3.12). Dopusteno je odstupanje od +/- 0.3!

Slika 162: Zadatak

Ovaj zadatak se razlikuje od prethodna dva samo po tome što mogu biti zadane točke koje su derivacija funkcije krivulje. Jedina razlika koja će se pojaviti je ta da ćemo prilikom računanja r u nekim slučajevima trebati imati derivaciju funkcije krivulje. Gdje god je u zadatku zadana točka derivirane krivulje, tu uvrštavamo deriviranu funkciju krivulje. Konkretno A, B i C izgledaju kao i do sad

$$\vec{A}(t_A) = \begin{bmatrix} 4.55 \\ 2.52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x0} \\ r_{y0} \end{bmatrix} \cdot (1-0.5)^3 + \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \end{bmatrix} \cdot 3 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5)^2 + \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \end{bmatrix} \cdot 3 \cdot 0.5^2 \cdot (1-0.5) + \begin{bmatrix} r_{x3} \\ r_{y3} \end{bmatrix} \cdot 0.5^3$$

$$\vec{B}(t_B) = \begin{bmatrix} 10.04 \\ 4.23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x0} \\ r_{y0} \end{bmatrix} \cdot (1-0.9)^3 + \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \end{bmatrix} \cdot 3 \cdot 0.9 \cdot (1-0.9)^2 + \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \end{bmatrix} \cdot 3 \cdot 0.9^2 \cdot (1-0.9) + \begin{bmatrix} r_{x3} \\ r_{y3} \end{bmatrix} \cdot 0.9^3$$

$$\vec{C}(t_C) = \begin{bmatrix} 7.07 \\ 2.82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x0} \\ r_{y0} \end{bmatrix} \cdot (1-0.7)^3 + \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \end{bmatrix} \cdot 3 \cdot 0.7 \cdot (1-0.7)^2 + \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \end{bmatrix} \cdot 3 \cdot 0.7^2 \cdot (1-0.7) + \begin{bmatrix} r_{x3} \\ r_{y3} \end{bmatrix} \cdot 0.7^3$$

No što se tiče D, on treba deriviranu vrijednost funkcije krivulje $p'(t)$.

$$\vec{p'}(t) = (\sum_{i=0}^{n} \vec{r_i} \cdot b_{i,n}(t))'$$

U toj formuli r_i je konstanta, a $b_{i,n}$ ovisi o t. Stoga je potrebno samo $b_{i,n}$ derivirati. Kada svaki $b_{i,n}$ deriviramo

$$(b_{0,3})' = ((1-t)^3)' = -3t^2 + 6t - 3$$

$$(b_(1,3))' = (3t(1-t)^2)' = 9t^2 - 12t + 3$$

$$(b_{2,3})' = (3t^2(1-t))' = -9t^2 + 6t$$

$$(b_{3,3})' = (t^3)' = 3t^2$$

Odnosno, derivirana funkcija krivulje bi izgledala:

$$\vec{p'}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x0} \\ r_{y0} \end{bmatrix} \cdot (-3 \cdot t^2 + 6 \cdot t - 3) + \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \end{bmatrix} \cdot (9 \cdot t^2 - 12 \cdot t + 3) + \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \end{bmatrix} \cdot (-9 \cdot t^2 + 6 \cdot t) + \begin{bmatrix} r_{x3} \\ r_{y3} \end{bmatrix} \cdot (3 \cdot t^2) \tag{52}$$

Sada, D izgleda

$$\vec{D}'(t_{D'}) = \begin{bmatrix} 6.57 \\ 3.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x0} \\ r_{y0} \end{bmatrix} \cdot (-3 \cdot 0.1^2 + 6 \cdot 0.1 - 3) + \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \end{bmatrix} \cdot (9 \cdot 0.1^2 - 12 \cdot 0.1 + 3) + \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \end{bmatrix} \cdot (-9 \cdot 0.1^2 + 6 \cdot 0.1)$$

$$+ \begin{bmatrix} r_{x3} \\ r_{y3} \end{bmatrix} \cdot (3 \cdot 0.1^2)$$

Kada se riješe navedene jednadžbe, za rješenje se dobije

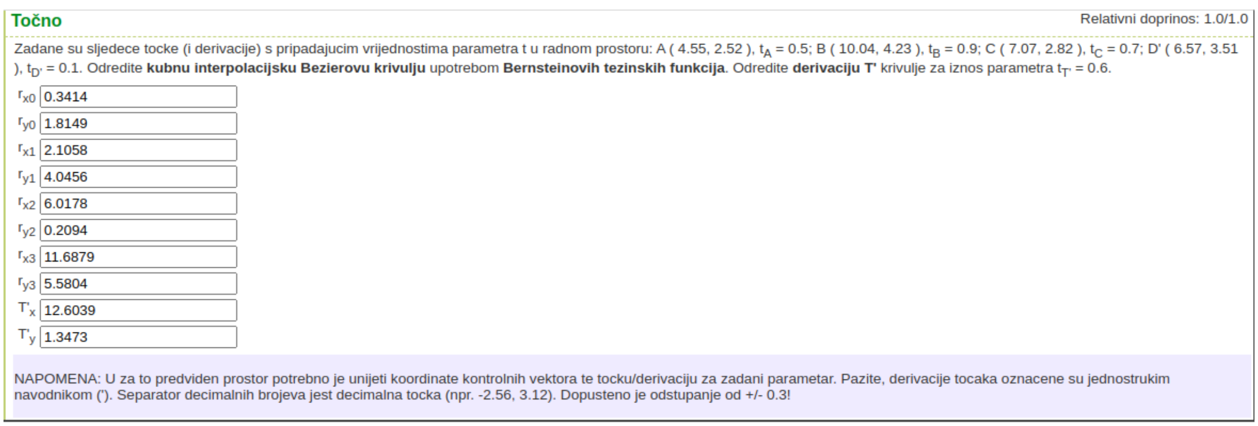
$$r_{x0} = 0.3414 \qquad r_{y0} = 1.8149$$

$$r_{x1} = 2.1058 \qquad r_{y1} = 4.0456$$

$$r_{x2} = 6.0178 \qquad r_{y2} = 0.2094$$

$$r_{x3} = 11.6879 \qquad r_{y3} = 5.5804$$

Kako treba izračunati derivaciju T', dovoljno je $t_{T'}$ uvrstiti u deriviranu funkciju krivulje 52.


Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadane su sljedece tocke (i derivacije) s pripadajucim vrijednostima parametra t u radnom prostoru: A (4.55, 2.52), t_A = 0.5; B (10.04, 4.23), t_B = 0.9; C (7.07, 2.82), t_C = 0.7; D' (6.57, 3.51), $t_{D'}$ = 0.1. Odredite **kubnu interpolacijsku Bezierovu krivulju** upotrebom **Bernsteinovih tezinskih funkcija**. Odredite **derivaciju T'** krivulje za iznos parametra $t_{T'}$ = 0.6.

r_{x0}	0.3414
r_{y0}	1.8149
r_{x1}	2.1058
r_{y1}	4.0456
r_{x2}	6.0178
r_{y2}	0.2094
r_{x3}	11.6879
r_{y3}	5.5804
T'_x	12.6039
T'_y	1.3473

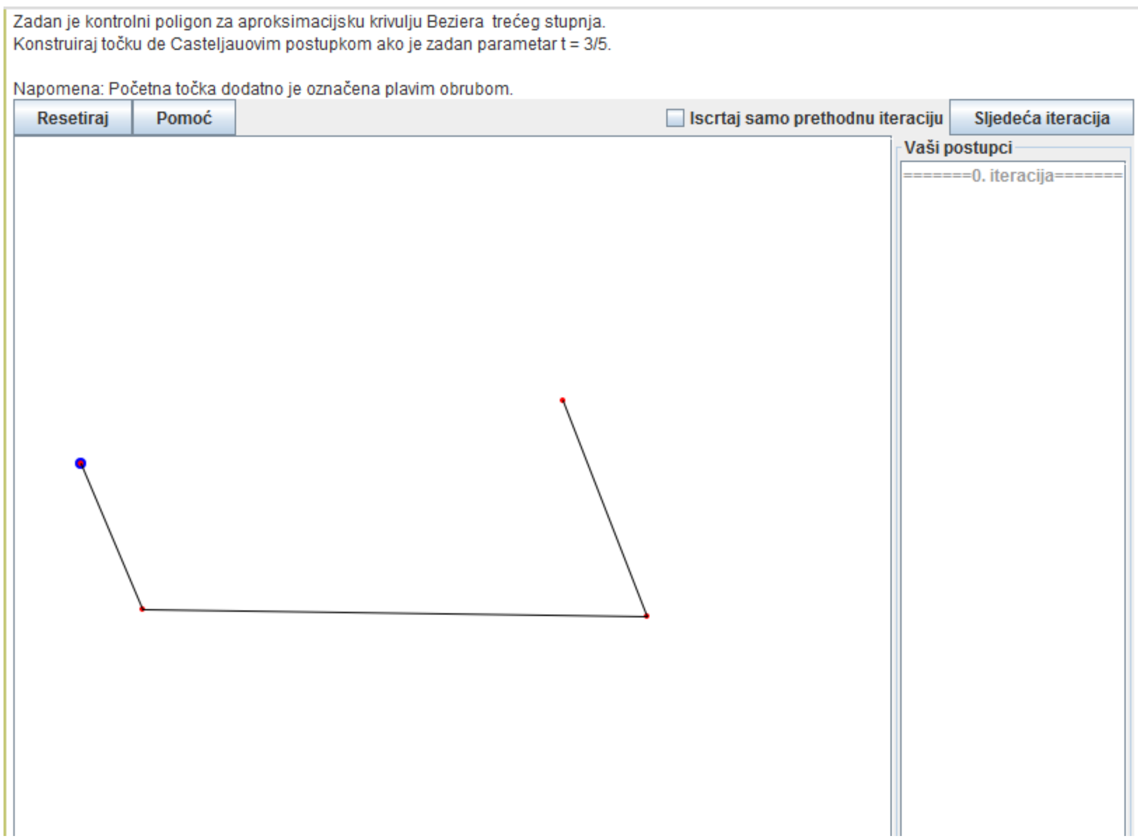
NAPOMENA: U za to predviden prostor potrebno je unijeti koordinate kontrolnih vektora te tocku/derivaciju za zadani parametar. Pazite, derivacije tocaka oznacene su jednostrukim navodnikom ('). Separator decimalnih brojeva jest decimalna tocka (npr. -2.56, 3.12). Dopusteno je odstupanje od +/- 0.3!

Slika 163: Zadatak riješen

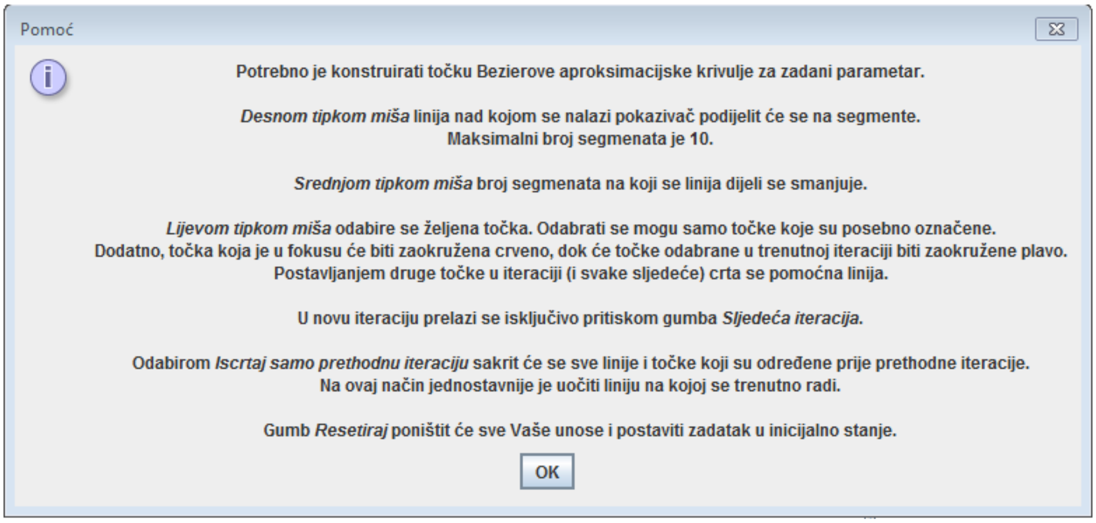
6.3 De Casteljau postupak

6.3.1 Kvadratna Bezierova krivulja

Video koji ukratko objašnjava možete pronaći u 6.2.1. Dodatno, objašnjenja je moguće pronaći i u knjizi na stranicama 153 i 154.

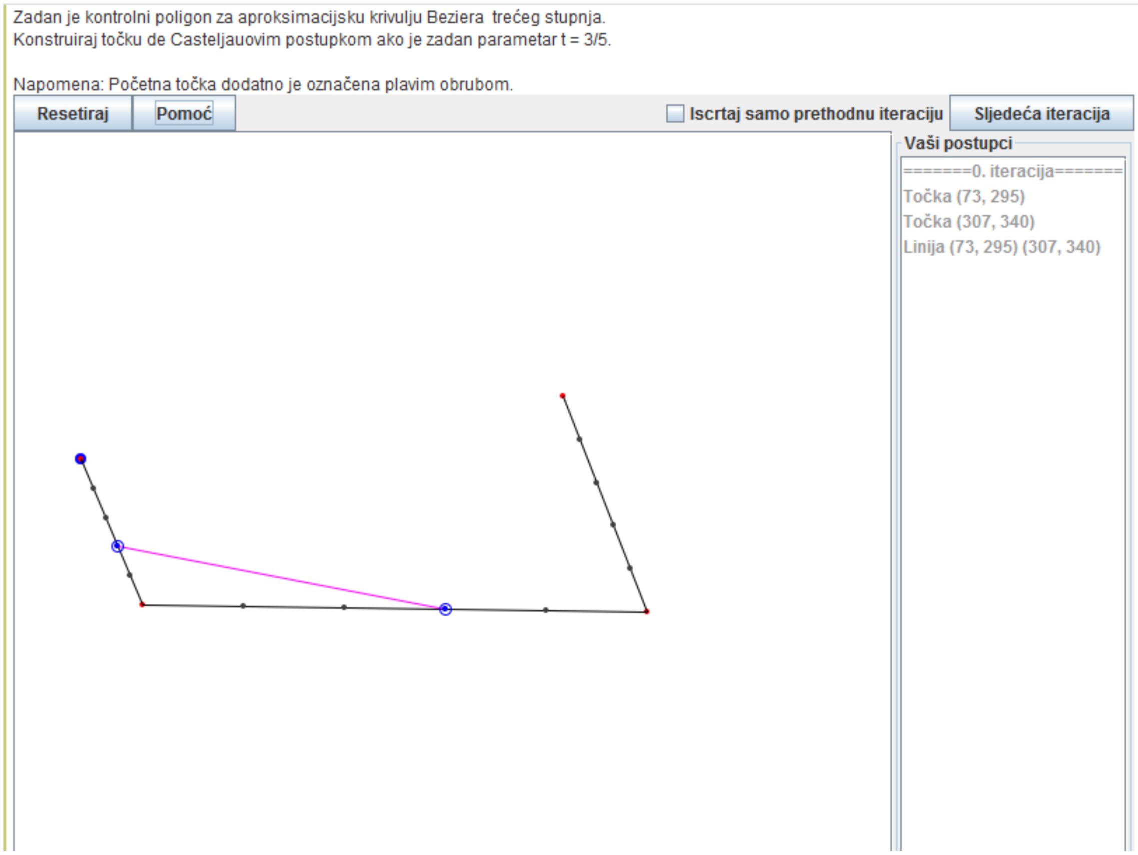


Slika 164: Zadatak



Slika 165: Pomoć

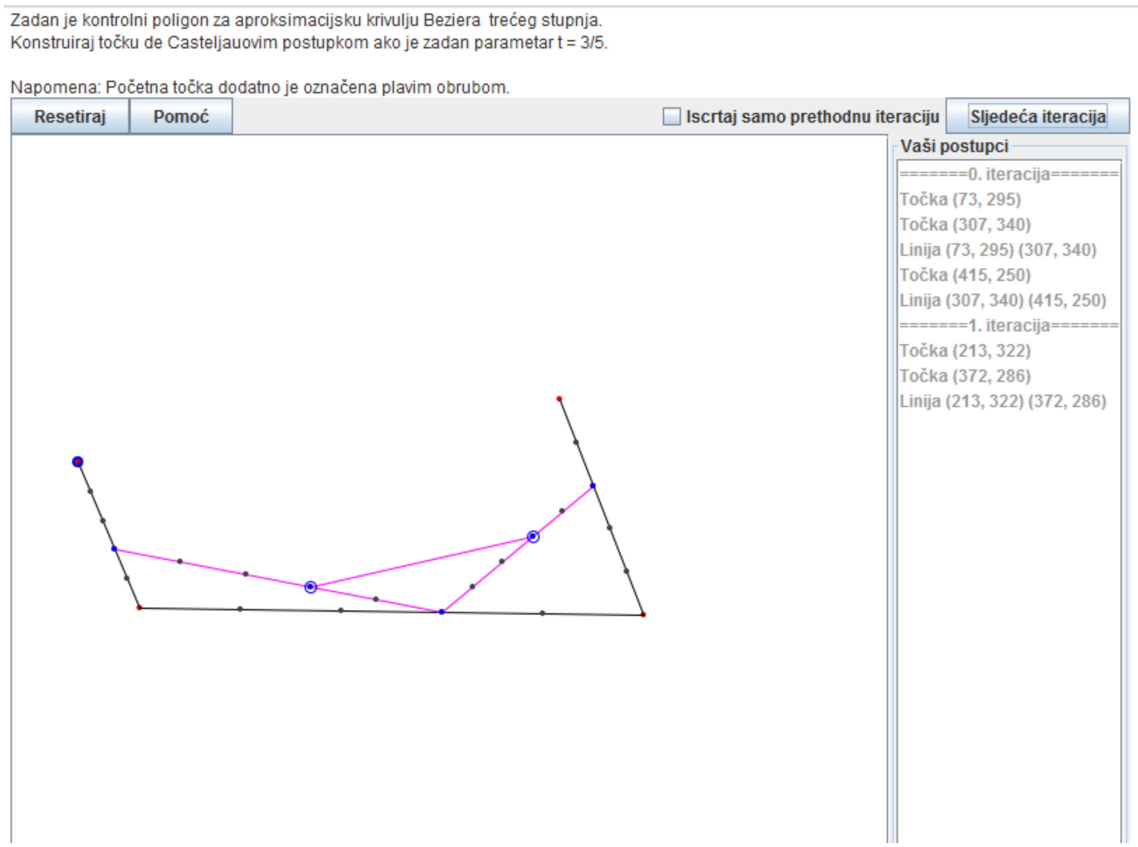
Pošto je parametar $t = \frac{3}{5}$, svaku ćemo liniju podijeliti na 5 jednakih dijelova. U pomoći piše kako se to radi 165. Podjela na 5 jednakih dijelova i spajanje treće točke prve linije i treće točke druge linije izgleda



Slika 166: Podjela svih dužina na 5 jednakih dijelova

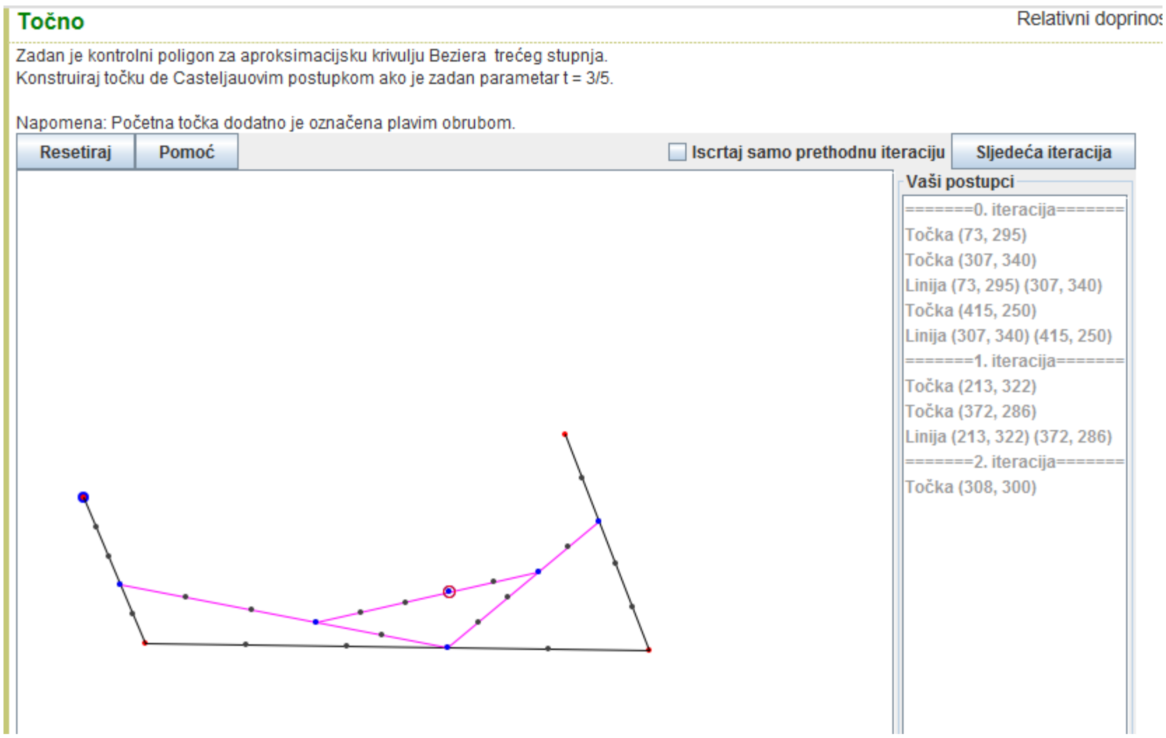
Nakon toga spojimo treću točku druge linije i treću točku treće linije i možemo u drugu iteraciju (treće točke spajamo zbog parametra t).

U drugoj iteraciji prethodno dobivene dvije linije podijelimo na 5 dijelova i opet spojimo treće točke te pređemo u novu iteraciju



Slika 167: Druga iteracija

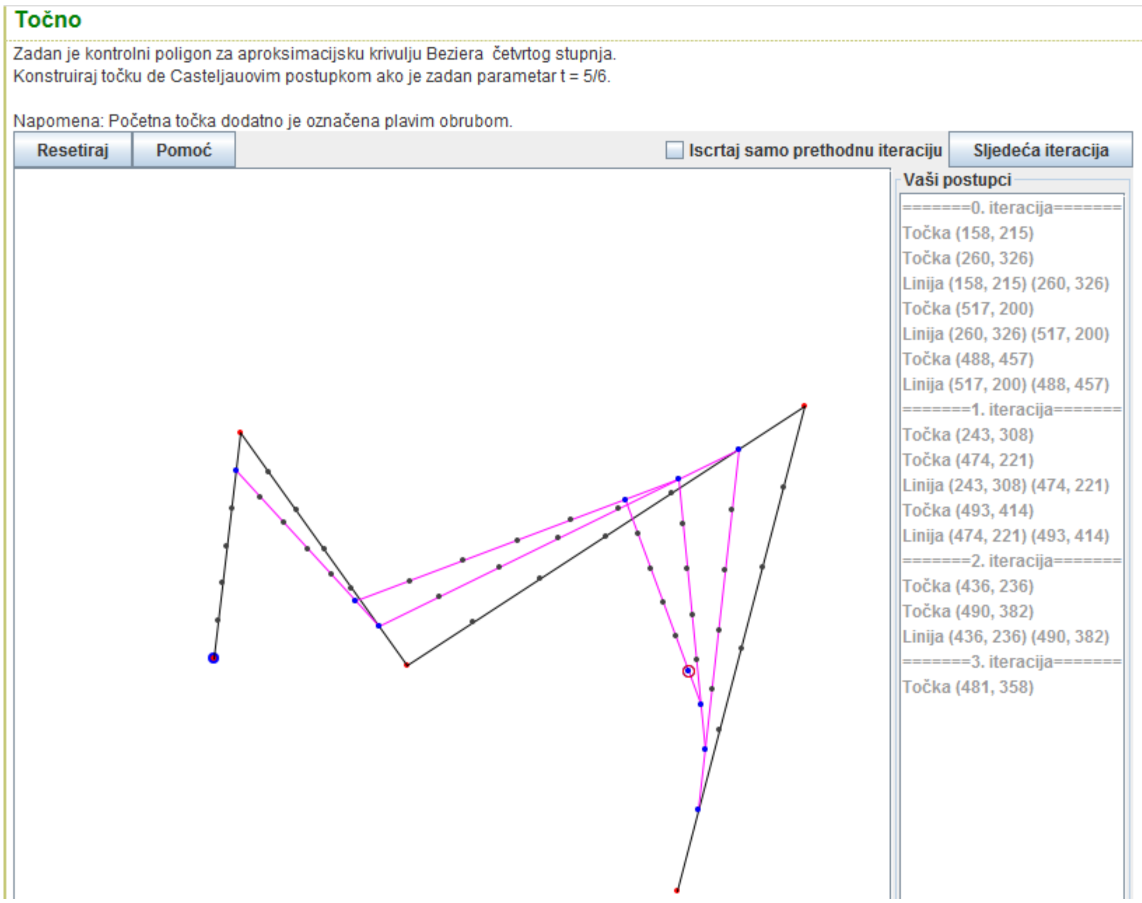
U posljednjoj iteraciji opet podijelimo novodobivenu dužinu na 5 jednakih dijelova i odaberemo treću točku. Ta točka je točka koju je trebalo konstruirati de Casteljauovim postupkom uz parametar $t = \frac{3}{5}$



Slika 168: Zadatak riješen

6.3.2 Kubna Bezierova krivulja

Koncept rješavanja zadatka je isti kao i u prethodnom potpoglavlju 6.3.1.



Slika 169: Zadatak riješen

Crvenim kružićem je označena točka koja se traži.

6.4 Tri segmenta Bezierove krivulje

6.4.1 Kubna krivulja u 2D

Prije rješavanja ovog zadatka, dobro je znati što znače C-kontinuiteti. Podsjetnik je u knjizi na stranici 144.

C^0 - zahtijeva neprekidnost funkcije

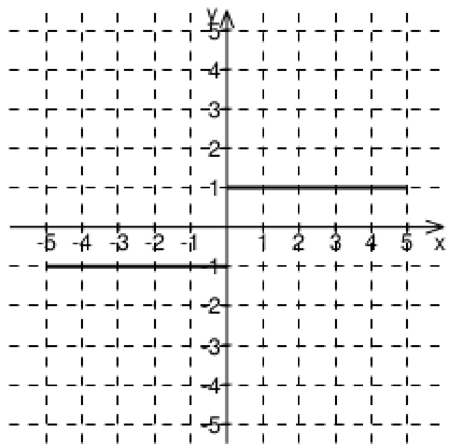
C^1 - zahtijeva neprekidnost prve derivacije

C^2 - zahtijeva neprekidnost druge derivacije

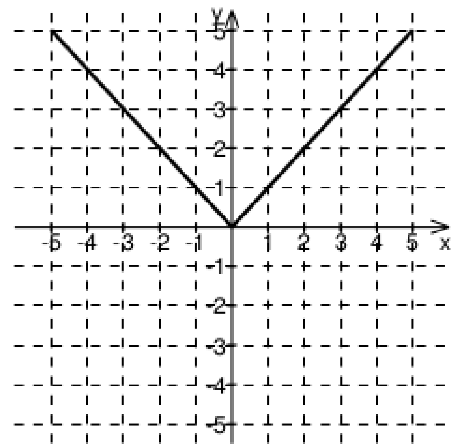
itd.

C^n - zahtijeva neprekidnost n-te derivacije

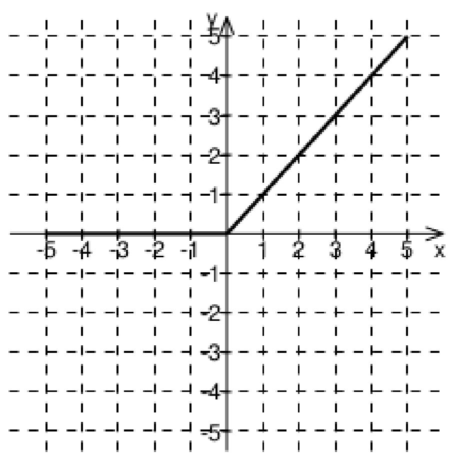
Pošto pomoću Bezierove i Bernsteinove težinske funkcije možemo opisati istu krivulju, i ovdje će se koristiti Bernsteinove težinske funkcije 50. S te se stranice i koriste formule navedene prilikom rješavanja zadatka.



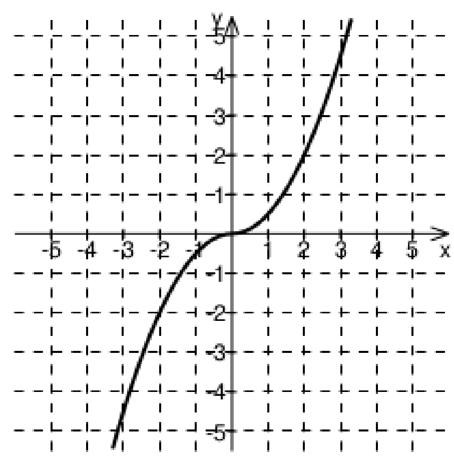
(a) Nema čak niti C^0



(b) Ima C^0 ali nema C^1



(c) Ima C^0 ali nema C^1



(d) Ima C^0 i C_1 ali nema C^2

Slika 170: Primjeri funkcija s različitim C diskontinuitetima - slika preuzeta iz knjige sa stranice 145

U 2D prostoru imamo tri segmenta Bezierove aproksimacijske kubne krivulje trećeg stupnja.
Prvi segment određen je točkama T_0=(-10, -5); T_1=(-9, 2); T_2=(2, 9); T_3=(8, -7).
Treći segment određen je točkama P_0=(31, -4); P_1=(37, 2); P_2=(44, -8); P_3=(46, 8).
Drugi segment povezan je s prvim i trećim uz ostvarenje C^1 kontinuiteta. Odredi koordinate točaka kontrolnog poligona drugog segmenta tako da navedeni uvjet bude ispunjen.
Koordinate točaka zapisati kao parove odvojene zarezom. Npr. "-1.23,4.56" (bez navodnika).

S\0\

S\1\

S\2\

S\3\

Reset

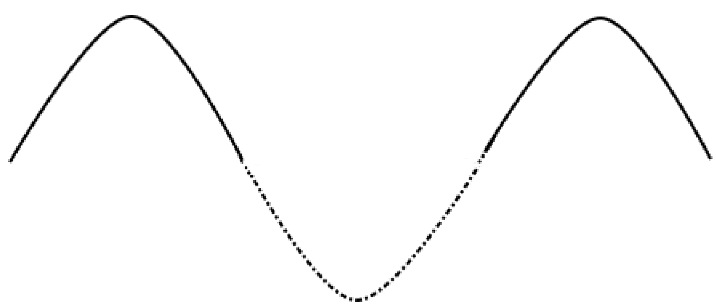
Napomena: Decimalni brojevi pišu se sljedećim formatom: -3.14
Bez razmaka!

Uočite koji znak se koristi kao decimalni razmak! Rješenja koja nisu u odgovarajućem formatu neće se ocjenjivati!

Napomena: Sva rješenja koja su od točnih komponenata udaljena manje od 0.3 bit će priznata.

Slika 171: Zadatak

Slikovito bi to moglo izgledati



Slika 172: Skica krivulje

Pune linije predstavljaju prvi segment krivulje i treći segment krivulje. Drugi segment je segment koji je iscrtkan te ga treba odrediti. Sa skice 172 je odmah vidljivo da je završna točka prvog segmenta krivulje jednaka početnoj točki drugog segmenta krivulje. Osim toga, vidljivo je da je završna točka drugog segmenta krivulje jednaka početnoj točki trećeg segmenta krivulje.

Kako je $t \in [0, 1]$, za vrijednost 0 daje početnu točku krivulje, a za vrijednost 1 daje završnu točku krivulje, prethodna razmatranja bi se zapisala:

$$p_1(1) = p_2(0)$$

$$p_2(1) = p_3(0)$$

gdje p_i predstavlja segment krivulje.
Kako se radi o krivuljama trećeg stupnja, one izgledaju ovako:

$$p_1(t) = T_0 \cdot (1-t)^3 + T_1 \cdot 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 + T_2 \cdot 3 \cdot t^2 \cdot (1-t) + T_3 \cdot t^3$$
$$p_2(t) = S_0 \cdot (1-t)^3 + S_1 \cdot 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 + S_2 \cdot 3 \cdot t^2 \cdot (1-t) + S_3 \cdot t^3$$
$$p_3(t) = P_0 \cdot (1-t)^3 + P_1 \cdot 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 + P_2 \cdot 3 \cdot t^2 \cdot (1-t) + P_3 \cdot t^3$$

Kada uvrstimo 0 i 1 u jednadžbe i izjednačimo

$$p_1(1) = p_2(0) \qquad T_3 = S_0$$
$$p_2(1) = p_3(0) \qquad S_3 = P_0$$

Druga stvar koja piše u zadatku je ta da segmenti moraju biti ostvareni uz C^1-diskontinuitet. To možemo primijetiti sa skice 172. Odnosno, glatkoća se mora nastaviti, prve derivacije moraju biti jednake. Upravo iz toga ćemo dobiti preostale dvije točke. Naime, derivacija prvog segmenta u krajnjoj točki se mora nastaviti na derivaciju drugog segmenta u početnoj točki, tako se i derivacija drugog segmenta u krajnjoj točki mora nastaviti na derivaciju trećeg segmenta u početnoj točki. To se može raspisati:

$$p_1'(1) = p_2'(0)$$
$$p_2'(1) = p_3'(0)$$

Derivacije funkcija izgledaju:

$$p_1'(t) = T_0 \cdot (-3t^2 + 6t - 3) + T_1 \cdot (9t^2 - 12t + 3) + T_2 \cdot (-9t^2 + 6t) + T_3 \cdot 3t^2$$
$$p_2'(t) = S_0 \cdot (-3t^2 + 6t - 3) + S_1 \cdot (9t^2 - 12t + 3) + S_2 \cdot (-9t^2 + 6t) + S_3 \cdot 3t^2$$
$$p_3'(t) = P_0 \cdot (-3t^2 + 6t - 3) + P_1 \cdot (9t^2 - 12t + 3) + P_2 \cdot (-9t^2 + 6t) + P_3 \cdot 3t^2$$

Kada uvrstimo 0 i 1 u derivirane jednadžbe i izjednačimo:

$$p_1'(1) = p_2'(0) \qquad -3T_2 + 3T_3 = -3S_0 + 3S_1$$
$$p_2'(1) = p_3'(0) \qquad -3S_2 + 3S_3 = -3P_0 + 3P_1$$

Odnosno:

$$S_1 = S_0 - T_2 + T_3$$
$$S_2 = P_0 - P_1 + S_3$$

Kako S_0 i S_3 znamo, možemo izračunati preostale dvije točke. Na taj način se dobije konačno rješenje

Točno Relativni doprin

U 2D prostoru imamo tri segmenta Bezierove aproksimacijske kubne krivulje trećeg stupnja.
Prvi segment određen je točkama T_0=(-10, -5); T_1=(-9, 2); T_2=(2, 9); T_3=(8, -7).
Treći segment određen je točkama P_0=(31, -4); P_1=(37, 2); P_2=(44, -8); P_3=(46, 8).
Drugi segment povezan je s prvim i trećim uz ostvarenje C^1 kontinuiteta. Odredi koordinate točaka kontrolnog poligona drugog segmenta tako da navedeni uvjet bude ispunjen.
Koordinate točaka zapisati kao parove odvojene zarezom. Npr. "-1.23,4.56" (bez navodnika).

S\0\ 8,-7
S\1\ 14,-23
S\2\ 25,-10
S\3\ 31,-4

Napomena: Decimalni brojevi pišu se sljedećim formatom: -3.14
Bez razmaka!

Uočite koji znak se koristi kao decimalni razmak! Rješenja koja nisu u odgovarajućem formatu neće se ocjenjivati!

Napomena: Sva rješenja koja su od točnih komponenata udaljena manje od 0.3 bit će priznata.

Slika 173: Zadatak riješen

6.4.2 Kubna krivulja u 3D

Zadatak se rješava na isti način kao i prethodni 6.4.1.

Točno Relativni do

U 3D prostoru imamo tri segmenta Bezierove aproksimacijske kubne krivulje trećeg stupnja.
Prvi segment određen je točkama T_0=(-2, 2, 3); T_1=(-3, -4, 1); T_2=(5, -6, -6); T_3=(6, 8, 5).
Treći segment određen je točkama P_0=(34, 7, 8); P_1=(39, -7, 2); P_2=(42, -2, 4); P_3=(43, 9, -7).
Drugi segment povezan je s prvim i trećim uz ostvarenje C^1 kontinuiteta. Odredi koordinate točaka kontrolnog poligona drugog segmenta tako da navedeni uvjet bude ispunjen.
Koordinate točaka zapisati kao trojke odvojene zarezom. Npr. "-1.23,4.56,-7.89" (bez navodnika).

S\0\ 6,8,5
S\1\ 7,22,16
S\2\ 29,21,14
S\3\ 34,7,8

Napomena: Decimalni brojevi pišu se sljedećim formatom: -3.14
Bez razmaka!

Uočite koji znak se koristi kao decimalni razmak! Rješenja koja nisu u odgovarajućem formatu neće se ocjenjivati!

Napomena: Sva rješenja koja su od točnih komponenata udaljena manje od 0.3 bit će priznata.

Slika 174: Zadatak riješen

6.5 Bezierova površina

Sve o Bezierovoj površini možete pronaći u knjizi na stranici 186.
Ukratko, Bezierovu površinu možemo zamisliti na sljedeći način. Uzmimo na primjer da imamo nekoliko Bezierovih krivulja u prostoru. Neka sve te krivulje budu zadane preko istog broja točaka. Bezierova površina bi onda povezivala sve te točke u nove Bezierove krivulje. Ako uvedemo dodatni parametar, dobijemo površinu. Detaljnije objašnjenje možete pronaći u knjizi na navedenoj stranici.

Formula koja se koristi kod Bezierove površine glasi

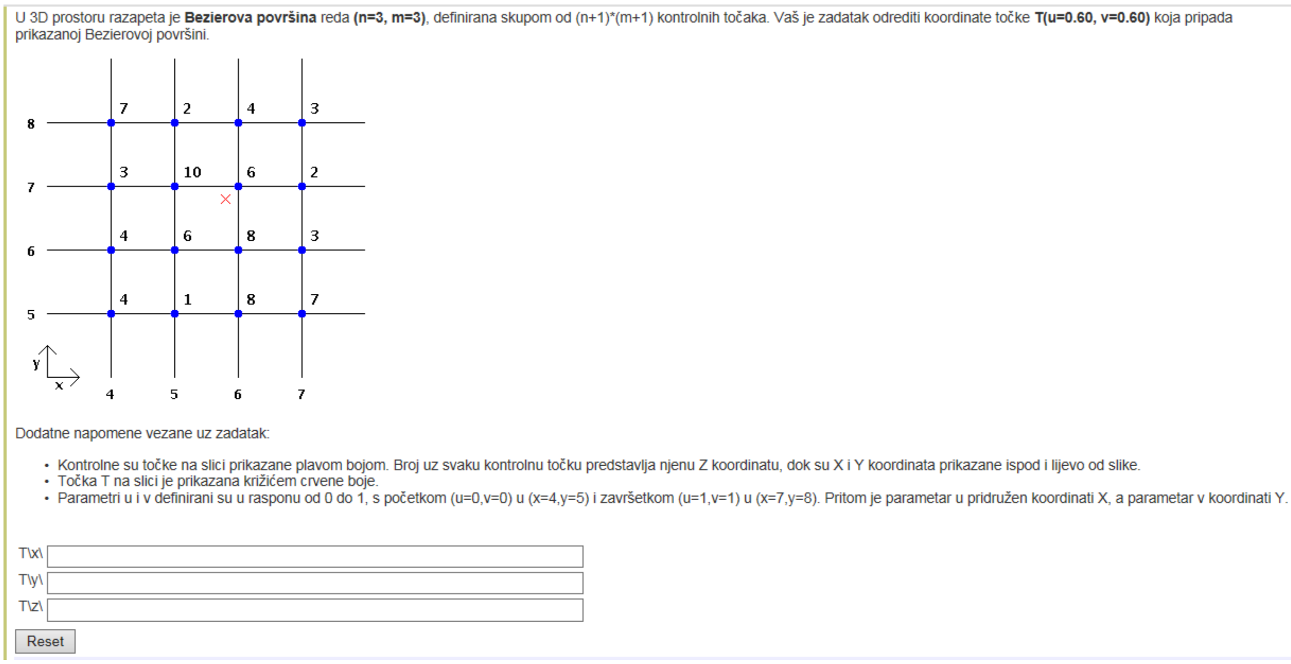
$$\vec{p}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} b_{i,m}(u) \cdot b_{j,n}(v) \cdot \vec{r_{i,j}} \tag{53}$$

gdje slovo m predstavlja broj zadanih Bezierovih krivulja, a slovo n predstavlja broj točaka koje opisuju pojedinu krivulju. $\vec{r_{i,j}}$ predstavlja pojedinu točku pojedine krivulje (j-ta točka i-te krivulje). Za jednostavnije računanje se može poseći za matričnim računom, na primjer, Bezierova površina za četiri krivulje u prostoru ($m = 3$) te svaku zadanu sa četiri kontrolne točke ($n = 3$):

$$\vec{p}(u,v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{r_{0,0}} & \vec{r_{0,1}} & \vec{r_{0,2}} & \vec{r_{0,3}} \\ \vec{r_{1,0}} & \vec{r_{1,1}} & \vec{r_{1,2}} & \vec{r_{1,3}} \\ \vec{r_{2,0}} & \vec{r_{2,1}} & \vec{r_{2,2}} & \vec{r_{2,3}} \\ \vec{r_{3,0}} & \vec{r_{3,1}} & \vec{r_{3,2}} & \vec{r_{3,3}} \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Čije objašnjenje također možete pronaći u knjizi.



Slika 175: Zadatak

Sa slike možemo odmah približno očitati x i y koordinatu točke T. Za x znamo da mora biti između 5 i 6, a za y znamo da mora biti između 6 i 7. To nam može pomoći ako se dogodi greška ili zamjena matrica. Zadane su 4 krivulje ($m = 3$) i one se protežu u y smjeru (ne znam kako to očitati iz zadatka, ali iz razloga što se koordinate tražene točke mogu očitati otprilike, račun se poklapa s time da se krivulje protežu u y smjeru).

Kako bi se riješio zadatak, dovoljno je uvrstiti u jednadžbu 54. Jedina stvar je u tome što ćemo morati tri puta uvrštavati u tu jednadžbu. Jednom za x koordinatu, jednom za y i jednom za z - jer je $\vec{r_{i,j}}$ vektor. Konkretno za x:

$$\vec{p}(0.6, 0.6) = \begin{bmatrix} 0.6^3 & 0.6^2 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6^3 \\ 0.6^2 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i dobije se $x = p(0.6, 0.6) = 5.8$

Isto tako i za y:

$$\vec{p}(0.6, 0.6) = \begin{bmatrix} 0.6^3 & 0.6^2 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6^3 \\ 0.6^2 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

te se dobije $y = p(0.6, 0.6) = 6.8$

za z:

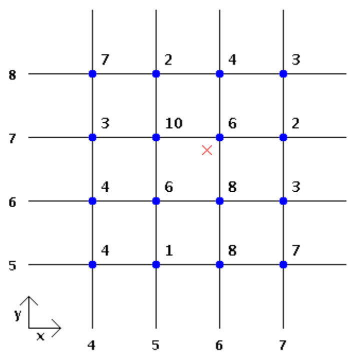
$$\vec{p}(0.6, 0.6) = \begin{bmatrix} 0.6^3 & 0.6^2 & 0.6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 6 & 10 & 2 \\ 8 & 8 & 6 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6^3 \\ 0.6^2 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

te se dobije $z = p(0.6, 0.6) = 5.47$ I to su rješenja zadatka.

Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

U 3D prostoru razapeta je **Bezierova površina** reda **(n=3, m=3)**, definirana skupom od (n+1)*(m+1) kontrolnih točaka. Vaš je zadatak odrediti koordinate točke **T(u=0.60, v=0.60)** koja pripada prikazanoj Bezierovoj površini.



Dodatne napomene vezane uz zadatak:

- Kontrolne su točke na slici prikazane plavom bojom. Broj uz svaku kontrolnu točku predstavlja njenu Z koordinatu, dok su X i Y koordinata prikazane ispod i lijevo od slike.
- Točka T na slici je prikazana križićem crvene boje.
- Parametri u i v definirani su u rasponu od 0 do 1, s početkom (u=0,v=0) u (x=4,y=5) i završetkom (u=1,v=1) u (x=7,y=8). Pritom je parametar u pridružen koordinati X, a parametar v koordinati Y.

T\x\ 5.80

T\y\ 6.80

T\z\ 5.47

Slika 176: Zadatak riješen

7 Uklanjanje skrivenih linija i površina

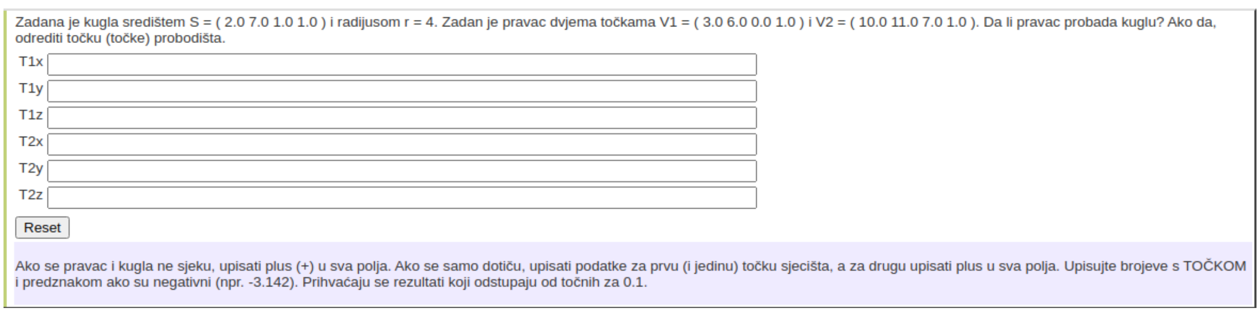
7.1 Sjecište pravca i kugle

Podsjetnik na parametarski oblik pravca 3.2.1.

Kugla radijusa r i centra C definirana je jednadžbom

$$(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 + (z - C_z)^2 = r^2 \tag{55}$$

Pravac i kugla mogu imati jednu točku presjecišta, tj. pravac dira kuglu. Dvije točke presjecišta, tj. pravac probada kuglu. Te ne moraju imati presjecište.


Zadana je kugla središtem S = (2.0 7.0 1.0 1.0) i radijusom r = 4. Zadan je pravac dvjema točkama V1 = (3.0 6.0 0.0 1.0) i V2 = (10.0 11.0 7.0 1.0). Da li pravac probada kuglu? Ako da, odrediti točku (točke) probodišta.

T1x

T1y

T1z

T2x

T2y

T2z

Reset

Ako se pravac i kugla ne sjeku, upisati plus (+) u sva polja. Ako se samo dotiču, upisati podatke za prvu (i jedinu) točku sjecišta, a za drugu upisati plus u sva polja. Upisujte brojeve s TOČKOM i predznakom ako su negativni (npr. -3.142). Prihvaćaju se rezultati koji odstupaju od točnih za 0.1.

Slika 177: Zadatak

Prva stvar koju je potrebno napraviti u zadatku je izjednačiti h koordinate. Kako su i za kuglu i za točke pravca jednake 1, u ovom slučaju ne treba.

Jednadžba pravca u parametarskom obliku (26) je oblika:

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a jednadžba kugle je oblika:

$$(x - 2)^2 + (y - 7)^2 + (z - 1)^2 = 16$$

Iz parametarskog oblika jednadžbe pravca raspišemo koordinate i uvrstimo u jednadžbu kugle:

$$x = 7t + 3$$

$$y = 5t + 6$$

$$z = 7t$$

$$(7t + 3 - 2)^2 + (5t + 6 - 7)^2 + (7t - 1)^2 = 16$$

$$123t^2 - 10t - 13 = 0$$

Kada se riješi ova kvadratna jednadžba dobiju se dva t. To znači da imamo dva probodišta.

$$t_1 = 0.3683$$

$$t_2 = -0.28698$$

Kako bismo dobili prvu točku probodišta, uvrstimo t_1 u jednadžbu pravca i dobijemo

$$x_1 = 5.5781$$

$$y_1 = 7.8415$$

$$z_1 = 2.5781$$

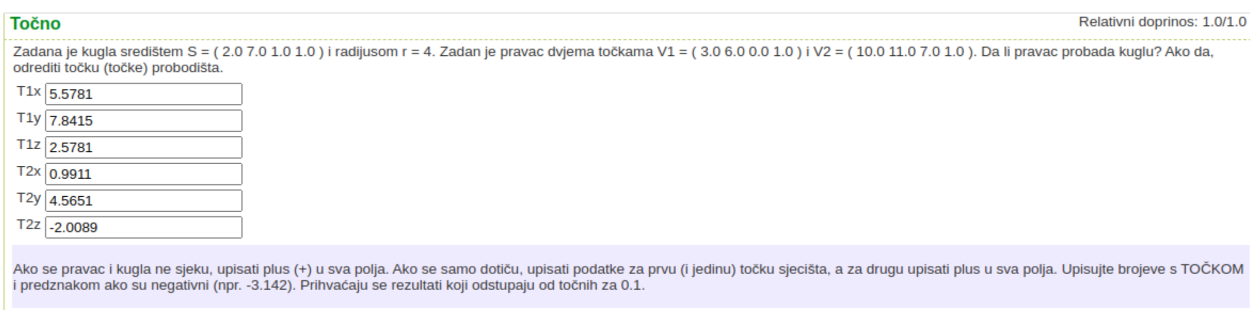
Za drugu točku uvrstimo t_2 u jednadžbu pravca

$$x_2 = 0.9911$$

$$y_2 = 4.5651$$

$$z_2 = -2.0089$$

I to su rješenja



Točno

Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadana je kugla središtem S = (2.0 7.0 1.0 1.0) i radijusom r = 4. Zadan je pravac dvjema točkama V1 = (3.0 6.0 0.0 1.0) i V2 = (10.0 11.0 7.0 1.0). Da li pravac probada kuglu? Ako da, odrediti točku (točke) probodišta.

T1x 5.5781

T1y 7.8415

T1z 2.5781

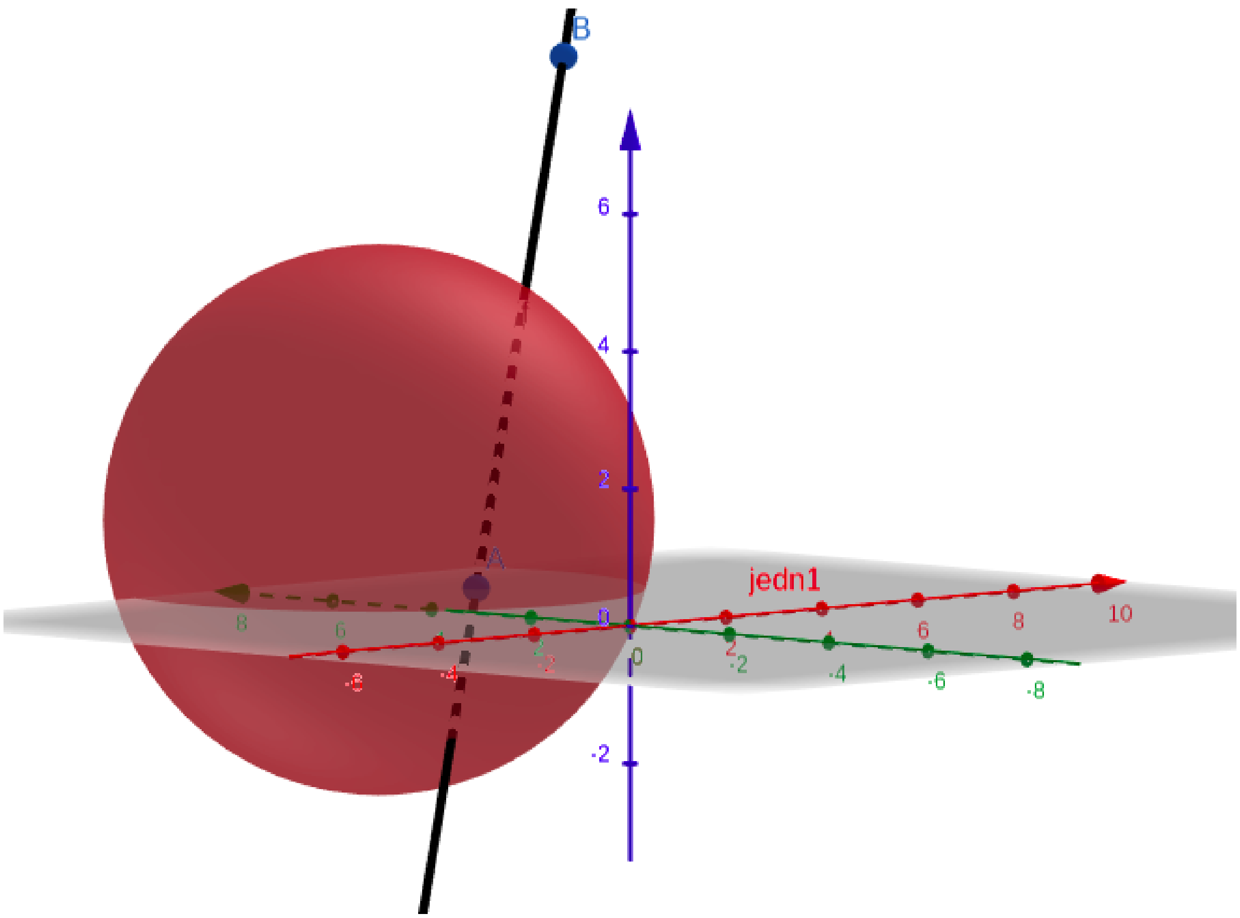
T2x 0.9911

T2y 4.5651

T2z -2.0089

Ako se pravac i kugla ne sjeku, upisati plus (+) u sva polja. Ako se samo dotiču, upisati podatke za prvu (i jedinu) točku sjecišta, a za drugu upisati plus u sva polja. Upisujte brojeve s TOČKOM i predznakom ako su negativni (npr. -3.142). Prihvaćaju se rezultati koji odstupaju od točnih za 0.1.

Slika 178: Zadatak riješen

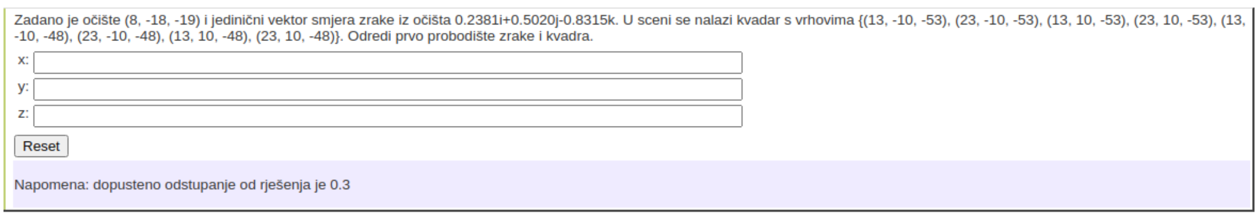


Slika 179: Prikaz zadane kugle i pravca u koordinatnom sustavu

7.2 Sjecište zrake i tijela

Ovo je jedan od dužih zadataka pa je potrebno biti oprezan prilikom rješavanja. Potrebno se podsjetiti kako odrediti sjecište pravca i ravnine 3.2.9. Osim toga, potrebno se podsjetiti pravca zadanog parametarski 3.2.1. Dodatno, dobro je se sjetiti formule za udaljenost dvije točke:

$$d(T_0, T_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \tag{56}$$



Slika 180: Zadatak

Kada pravac probada tijelo, postoje jedno ili dva sjecišta. Kako je u sceni zadan kvadar, rasporedit ćemo ga u 6 četverokuta od kojih će svaki četverokut predstavljati ravninu. Četverokute ćemo rasporediti na način da promatramo koordinate vrhova. Kako se četverokut sastoji od 4 vrha, 6 četverokuta ćemo grupirati u grupe sa po 4 vrha. Grupe će biti oblika u kojim je jedna koordinata jednaka, a ostale dvije se mijenjaju. Na taj način možemo odrediti svih 6 strana kvadra.

x koordinate konstantne, vrhovi:

$x = 13$	$x = 23$
$(13, -10, -53)$	$(23, -10, -53)$
$(13, 10, -53)$	$(23, 10, -53)$
$(13, -10, -48)$	$(23, -10, -48)$
$(13, 10, -48)$	$(23, 10, -48)$

y koordinate konstantne, vrhovi:

$y = -10$	$y = 10$
$(13, -10, -53)$	$(13, 10, -53)$
$(23, -10, -53)$	$(23, 10, -53)$
$(13, -10, -48)$	$(13, 10, -48)$
$(23, -10, -48)$	$(23, 10, -48)$

z koordinate konstantne, vrhovi:

$$\begin{array}{cc} z=-53 & z=-48 \\ (13,-10,-53) & (13,-10,-48) \\ (23,-10,-53) & (23,10,-48) \\ (13,10,-53) & (13,10,-48) \\ (23,10,-53) & (23,10,-48) \end{array}$$

Ako vam nije jasno zašto je takva raspodjela, pokušajte si skicirati kvadar u koordinatnom sustavu.

Sljedeći korak je napraviti od tih 6 četverokuta, 6 jednadžbi ravnina (uzmemo, npr., prve tri točke svakog četverokuta):
za $x = 13$

$$r_1 \ldots \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 13 & -10 & -53 \end{bmatrix}$$

za $x = 23$

$$r_2 \ldots \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 23 & -10 & -53 \end{bmatrix}$$

za $y = -10$

$$r_3 \ldots \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 13 & -10 & -53 \end{bmatrix}$$

za $y = 10$

$$r_4 \ldots \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 13 & 10 & -53 \end{bmatrix}$$

za $z = -53$

$$r_5 \ldots \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 13 & -10 & -53 \end{bmatrix}$$

te za $z = -48$

$$r_6 \ldots \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 13 & -10 & -48 \end{bmatrix}$$

Nadalje, iz zadatka znamo da je jednadžba pravca iz očišta oblika

$$p\ldots \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2381 & 0.502 & -0.8315 \\ 8 & -18 & -19 \end{bmatrix}$$

jer znamo da se parametarski oblik sastoji od vektora smjera pravca i točke kroz koju prolazi.

Posljednje što je potrebno napraviti je izračunati sjecište toga pravca sa svih 6 ravnina. Kako bismo malo ubrzali postupak, dovoljno je izračunati samo t i uvrstiti u jednadžbu pravca. Dobiva se redom:
kada računamo presjek p i r_1 dobijemo $t_1 = 20.99958$
p i r_2 -> $t_2 = 62.99874$
p i r_3 -> $t_3 = 15.936$
p i r_4 -> $t_4 = 55.778$
p i r_5 -> $t_5 = 40.89$
te p i r_6 -> $t_6 = 34.88$

Kada krenemo uvrštavati t u jednadžbu pravca, dobivamo

$$x = 0.2381 \cdot t_1 + 8 = 13$$

Pošto nam je x između 13 i 23, ovo je za sada u redu jer smo dobili da sječe ovu ravninu u $x = 13$. Krenimo s y

$$y = 0.502 \cdot t_1 - 18 = -7.46$$

I ovo je u redu jer y je između -10 i 10. Uvrstimo z

$$z = -0.8315 \cdot t_1 - 19 = -36.46$$

Ovdje možemo zaključiti da pravac probada ovu ravninu u točki koja nije dio tog četverokuta. Jer se ne poklapa z koordinata. z nam treba biti između -48 i -53. Stoga, ova ravnina nije probodište pravca i kvadra. Istu stvar napravimo i za ostale vrijednosti t.

Kada se to napravi, zaključi se da jedina dva t koja daju zadovoljavajuća rješenja su t_5 i t_6. Konkretno

$$\begin{array}{cc} t_5 & t_6 \\ x = 17.735 & x = 16.305 \\ y = 2.527 & y = -0.49 \\ z = -50.473 & z = -48.003 \end{array}$$

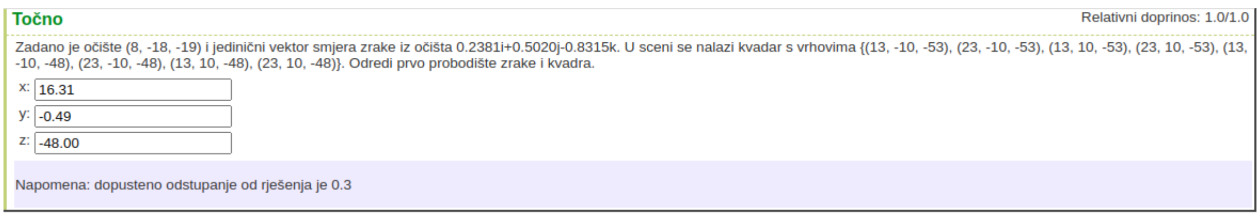
Posljednja stvar je odrediti koja je od ove dvije točke prvo probodište. To ćemo napraviti jednostavno tako da odredimo udaljenost između dobivenih točaka i očišta. Ona točka koja ima manju udaljenost je prvo probodište. Konkrento, za točku parametra t_5 se dobije da su udaljene od očišta (56)

$$d(O, V_5) = 38.82$$

a za točku parametra t_6 se dobije

$$d(O, V_6) = 34.882$$

Stoga je točka parametra t_6 prvo probodište pravca iz očišta i kvadra.

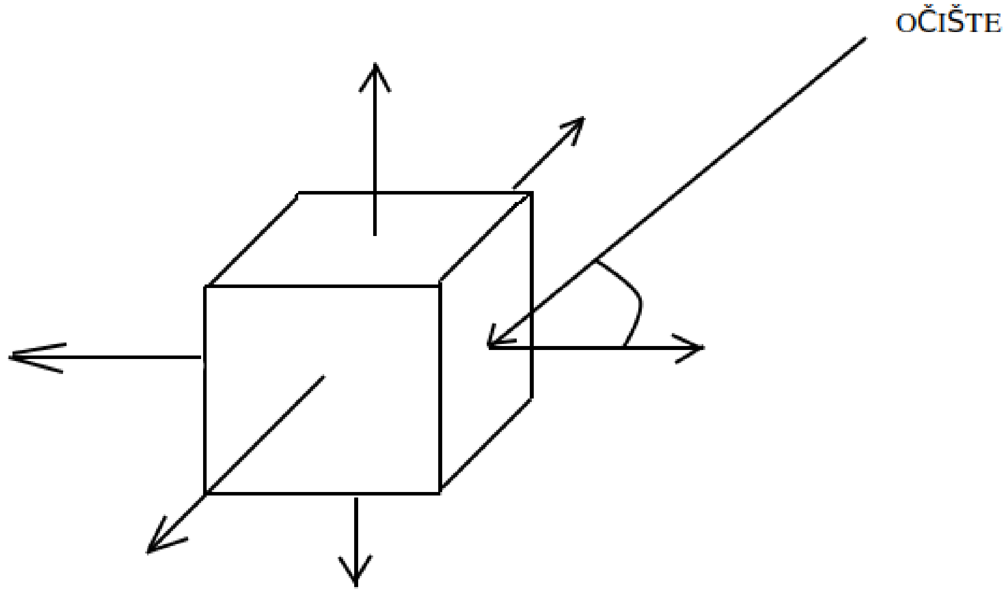


Slika 181: Zadatak riješen

7.3 Vidljivi poligoni kod piramide

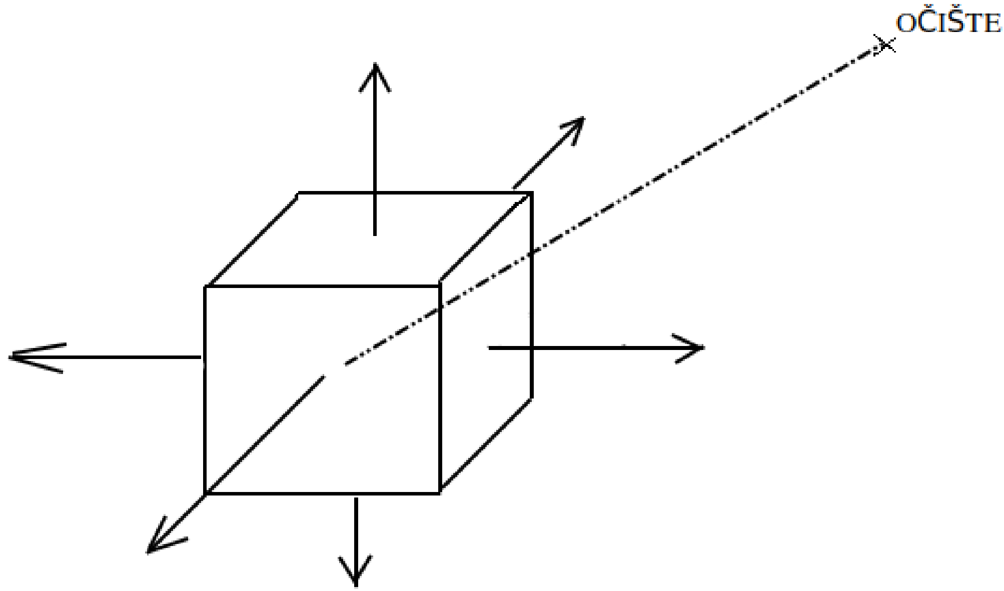
Postoje dva načina na koja možemo odrediti koji je poligon stražnji.

Prvi način je taj da provjeravamo kut između normale ravnine tijela i vektora od točke promatranog poligona (npr. središta poligona) do očišta. Uz to, normale moraju biti usmjerene van tijela, tj. vrhovi poligona moraju biti CCW. U tom slučaju, ako je kut između 0° i 90° - poligon nije stražnji, a ako je između 90° i 180°, stražnji je.

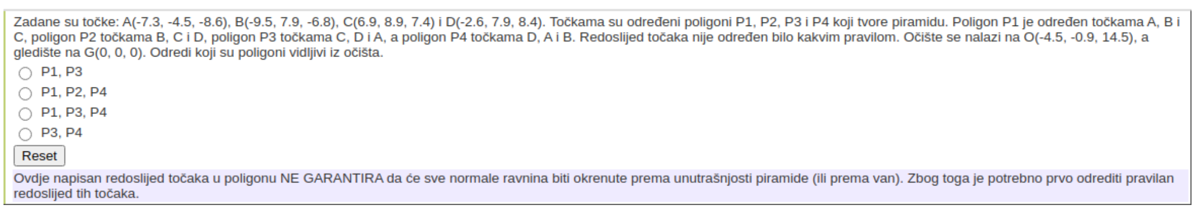


Slika 182: Iz zadanog očišta označeni poligon je vidljiv, jer je kut manji od $90°$

Drugi način je malo jednostavniji, a to je da točku očišta uvrstimo u jednadžbu ravnine poligona. Ako dobijemo rezultat < 0, to znači da je očište iza te ravnine, tj. nije vidljivo. Automatski se zaključuje da taj poligon nije vidljiv iz očišta. I u ovom slučaju, normale ravnina trebaju pokazivati prema van tijela (vrhovi poligona CCW). Jer ako ne pokazuju, dobiju se krivi rezultati. Tj. krivo je raspoređeno što je iznad ravnine, a što ispod.



Slika 183: Iz ovog poligona očište nije vidljivo jer je iza njega



Zadane su točke: A(-7.3, -4.5, -8.6), B(-9.5, 7.9, -6.8), C(6.9, 8.9, 7.4) i D(-2.6, 7.9, 8.4). Točkama su određeni poligoni P1, P2, P3 i P4 koji tvore piramidu. Poligon P1 je određen točkama A, B i C, poligon P2 točkama B, C i D, poligon P3 točkama C, D i A, a poligon P4 točkama D, A i B. Redoslijed točaka nije određen bilo kakvim pravilom. Očište se nalazi na O(-4.5, -0.9, 14.5), a gledište na G(0, 0, 0). Odredi koji su poligoni vidljivi iz očišta.

- P1, P3
- P1, P2, P4
- P1, P3, P4
- P3, P4

Reset

Ovdje napisan redoslijed točaka u poligonu NE GARANTIRA da će sve normale ravnina biti okrenute prema unutrašnjosti piramide (ili prema van). Zbog toga je potrebno prvo odrediti pravilan redoslijed tih točaka.

Slika 184: Zadatak

Za ovaj zadatak gledište nije bitno jer zadatak kaže da se odredi koji su poligoni vidljivi iz očišta. Prvo ćemo odrediti jednadžbe ravnina svih poligona te odrediti imaju li ispravan redoslijed.

Određivanje implicitne jednadžbe ravnine zadane preko tri točke, za podsjetnik kako se radi, možete vidjeti ovdje 3.2.3. Krenimo redom s poligonom P_1. Prvo izračunamo normalu

$$(B - A) \times (C - A) = \vec{n}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 174.28 \\ 60.76 \\ -205.56 \end{bmatrix}$$

Za sada nam implicitni oblik jednadžbe ravnine izgleda

$$174.28x + 60.76y - 205.56z + D = 0$$

Kako bismo odredili D, uvrstimo točku A u jednadžbu ravnine

$$174.28 \cdot (-7.3) + 60.76 \cdot (-4.5) - 205.56 \cdot (-8.6) + D = 0$$

$$D = -207.552$$

Jednadžba ravnine u kojoj je poligon P_1 glasi

$$174.28x + 60.76y - 205.56z - 207.552 = 0$$

Kako bismo provjerili orijentaciju vrhova poligona, dovoljno je uvrstiti točku koja nije sastavni dio ovog poligona kao test (konkretno vrh D). Naime, ako dobijemo kao rješenje broj < 0, orijentacija je dobra. Ako ne dobijemo kao rješenje broj < 0, predznake dobivene jednadžbe ravnine je potrebno preokrenuti, a samim time obrnuti i redoslijed vrhova. Zašto je to tako? Jer ako normala poligona gleda prema van, točka koja nije sastavni dio tog poligona, ali je sastavni dio tijela, će uvijek biti iza te ravnine, tj. ako uvrstimo njene koordinate, upravo će dati negativan broj.

Kada uvrstimo točku D u dobivenu jednadžbu ravnine, za rezultat dobijemo -1912.58. Pošto je broj negativan, orijentacija vrhova je dobra.

Sada usput možemo uvrstiti i koordinate točke očišta u jednadžbu ravnine. Kada uvrstimo, kao rezultat dobijemo -4036.116 što znači da navedeni poligon nije vidljiv iz očišta.

Automatski, eliminacijom odgovora, pošto se P_1 ne vidi, zaključujemo da su P_3 i P_4 vidljivi poligoni.

Pokazat ću jedan od ta dva poligona jer se dogodila zamjena redoslijeda vrhova. To se dogodi u poligonu P_4. Jednadžba poligona P_4 je

$$188.48x + 45.86y - 85.56z + 846.458 = 0$$

Kada uvrstimo točku koja nije sastavni dio poligona, ali jest tijela, točku C, dobijemo 1921.98. Znači da treba obrnuti redoslijed vrhova i predznake jednadžbe ravnine.

Novi redoslijed vrhova je B, A, D, a jednadžba ravnine

$$-188.48x - 45.86y + 85.56z - 846.458 = 0$$

i u tu jednadžbu uvrštavamo očište.

Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadane su točke: A(-7.3, -4.5, -8.6), B(-9.5, 7.9, -6.8), C(6.9, 8.9, 7.4) i D(-2.6, 7.9, 8.4). Točkama su određeni poligoni P1, P2, P3 i P4 koji tvore piramidu. Poligon P1 je određen točkama A, B i C, poligon P2 točkama B, C i D, poligon P3 točkama C, D i A, a poligon P4 točkama D, A i B. Redoslijed točaka nije određen bilo kakvim pravilom. Očište se nalazi na O(-4.5, -0.9, 14.5), a gledište na G(0, 0, 0). Odredi koji su poligoni vidljivi iz očišta.

- P1, P3
- P1, P2, P4
- P1, P3, P4
- P3, P4

Ovdje napisan redoslijed točaka u poligonu NE GARANTIRA da će sve normale ravnina biti okrenute prema unutrašnjosti piramide (ili prema van). Zbog toga je potrebno prvo odrediti pravilan redoslijed tih točaka.

Slika 185: Zadatak riješen

7.4 Odnos točke i tijela

7.4.1 Tetraedar

Algoritam radi na način da točku uvrštavamo redom u jednadžbe ravnine i ako za bilo koju (dovoljno je jednu) vrijednost dobijemo da je >0, točka je izvan tijela. Lijepo zapisano, točka V je izvan tijela ako vrijedi

$$(\exists i)(V \cdot R_i > 0), i = 1, ..., n \tag{57}$$

Zadano je tijelo pomoću točaka i ploha. Točke su zadane koordinatama, dok su plohe zadane rednim brojevima točaka koje ih određuju:

PLOHE	TOČKE
P1: 1 3 2	T1: -6 -2 -2
P2: 1 2 4	T2: 2 -1 -1
P3: 1 4 3	T3: -4 4 -1
P4: 2 3 4	T4: -4 -1 6

Zadana je točka T = (3, 4, 0). Za provjeru odnosa točke i tijela koristi se algoritam iz 4. laboratorijske vježbe, koji poligone ispituje od prvog prema zadnjem.
Ispitivanjem kojeg poligona će se utvrditi da je točka izvan tijela? Kao rješenje unesite indeks tog poligona (oprez: indeksi počinju od 1). Ako je točka unutar tijela, unesite 0. Ako je točka na rubu tijela, smatra se da je unutar tijela.

Reset

Slika 186: Zadatak

Ovdje ne trebamo provjeravati redoslijed vrhova, nego radimo s redoslijedom kako je zadan. Za podsjetnik o izračunu implicitne jednadžbe ravnine posjetiti 3.2.3. Krenimo redom s računanjem ravnina.

$$\vec{n_1} = (T_3 - T_1) \times (T_2 - T_1)$$

Kad se sve uvrsti i izračuna i D, za jednadžbu se dobije

$$p_1 ... 5x + 6y - 46z - 50 = 0$$

Tako isto i za ostale poligone

$$p_2 ... 7x - 62y + 6z - 70 = 0$$

$$p_3 ... - 47x + 14y + 10z - 234 = 0$$

$$p_4 ... 35x + 42y + 30z + 2 = 0$$

Kada krenemo redom uvrštavati točku T u dobivene jednadžbe, dobiva se redom

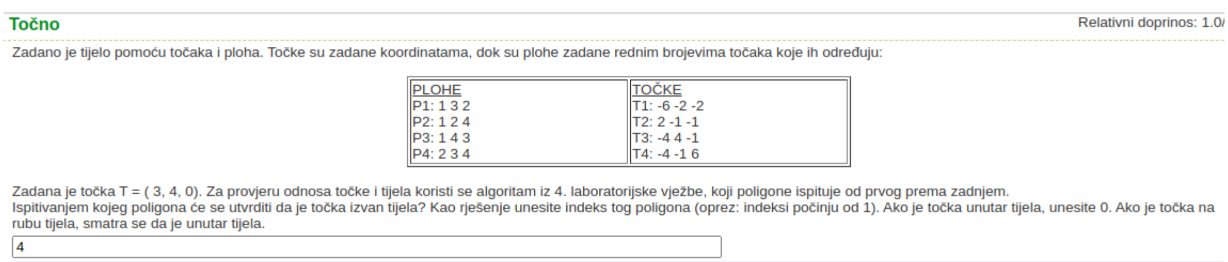
$$p_1 ... \quad -11$$

$$p_2 ... \quad -297$$

$$p_3 ... \quad -319$$

$$p_4 ... \quad 275$$

Te zaključujemo da zbog četvrtog poligona znamo da se točka T nalazi izvan tetraedra.



Točno

Relativni doprinos: 1.0/

Zadano je tijelo pomoću točaka i ploha. Točke su zadane koordinatama, dok su plohe zadane rednim brojevima točaka koje ih određuju:

PLOHE	TOČKE
P1: 1 3 2	T1: -6 -2 -2
P2: 1 2 4	T2: 2 -1 -1
P3: 1 4 3	T3: -4 4 -1
P4: 2 3 4	T4: -4 -1 6

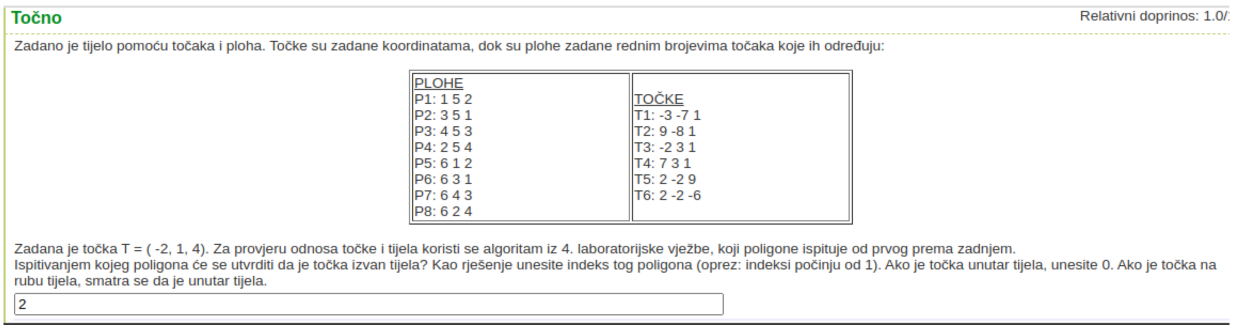
Zadana je točka T = (3, 4, 0). Za provjeru odnosa točke i tijela koristi se algoritam iz 4. laboratorijske vježbe, koji poligone ispituje od prvog prema zadnjem. Ispitivanjem kojeg poligona će se utvrditi da je točka izvan tijela? Kao rješenje unesite indeks tog poligona (oprez: indeksi počinju od 1). Ako je točka unutar tijela, unesite 0. Ako je točka na rubu tijela, smatra se da je unutar tijela.

4

Slika 187: Zadatak riješen

7.4.2 Oktaedar

Zadatak se rješava isto kao prethodni 7.4.1 samo što oktaedar ima više ploha.



Točno Relativni doprinos: 1.0/

Zadano je tijelo pomoću točaka i ploha. Točke su zadane koordinatama, dok su plohe zadane rednim brojevima točaka koje ih određuju:

PLOHE	TOČKE
P1: 1 5 2	
P2: 3 5 1	T1: -3 -7 1
P3: 4 5 3	T2: 9 -8 1
P4: 2 5 4	T3: -2 3 1
P5: 6 1 2	T4: 7 3 1
P6: 6 3 1	T5: 2 -2 9
P7: 6 4 3	T6: 2 -2 -6
P8: 6 2 4	

Zadana je točka T = (-2, 1, 4). Za provjeru odnosa točke i tijela koristi se algoritam iz 4. laboratorijske vježbe, koji poligone ispituje od prvog prema zadnjem.
Ispitivanjem kojeg poligona će se utvrditi da je točka izvan tijela? Kao rješenje unesite indeks tog poligona (oprez: indeksi počinju od 1). Ako je točka unutar tijela, unesite 0. Ako je točka na rubu tijela, smatra se da je unutar tijela.

2

Slika 188: Zadatak riješen

7.5 Warnockov postupak

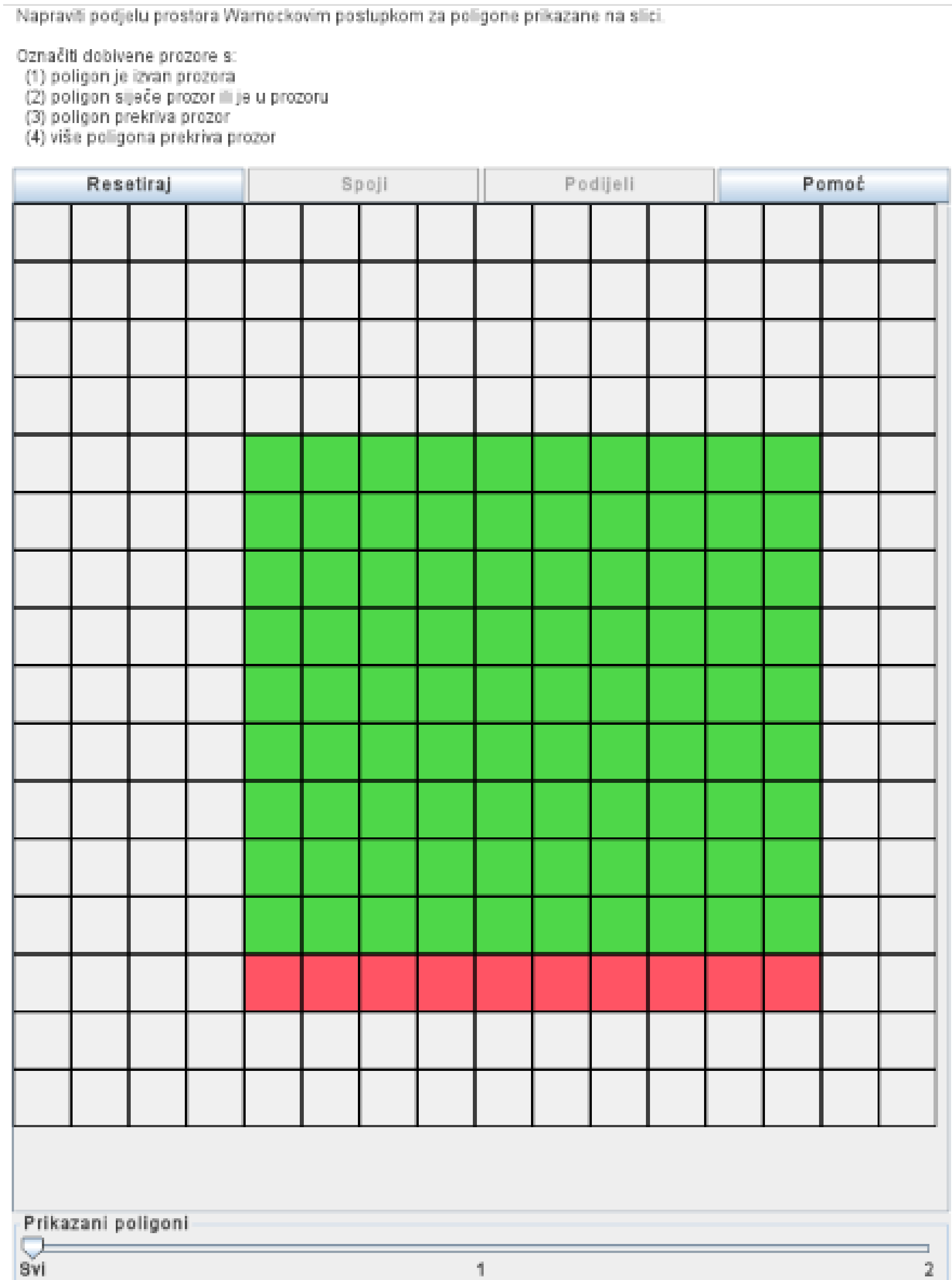
7.5.1 Jednostavniji slučaj

Sve o Warnockovom postupku možete pronaći u knjizi na stranici 219. i nadalje.

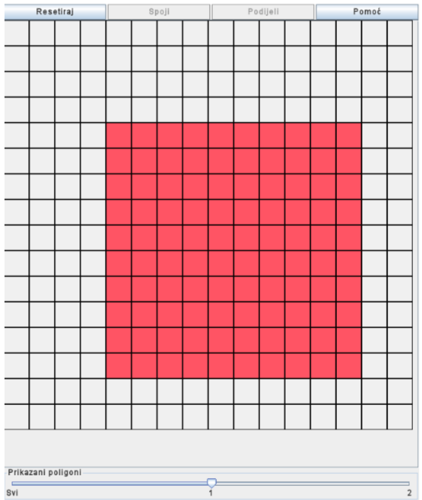
Ukratko, kako kod postupka ispitivanja z-spremnika provjeravamo piksel po piksel ekrana, tako u postupku Warnocka provjeravamo cijeli ekran odjednom. Nakon toga ekran dijelimo na četvrtine rekurzivno dok god situacija nije jasna. Algoritam se rasteže u četiri slučaja:

1. poligon je izvan prozora - prazan przor
2. **jedan** poligon siječe prozor ili je u prozoru
3. **jedan** poligon prekriva cijeli prozor
4. **više** poligona prekriva cijeli prozor

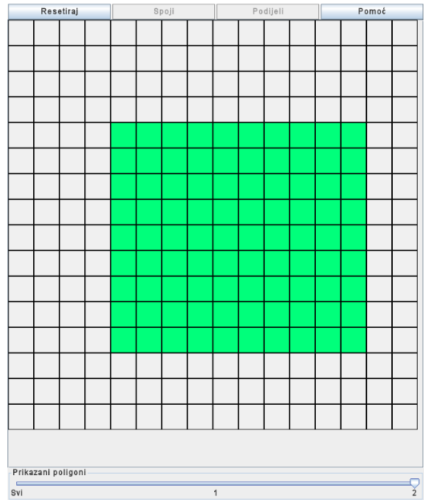
Kad ne možemo jednoznačno odrediti koji je slučaj kod prozora, dijelimo rekurzivno dalje. Ako do sad nije jasno, bit će jasnije kroz zadatak. U suštini, postupak Warnocka se koristi da bi se odredilo što je vidljivo na ekranu, a što nije.



Slika 189: Zadatak



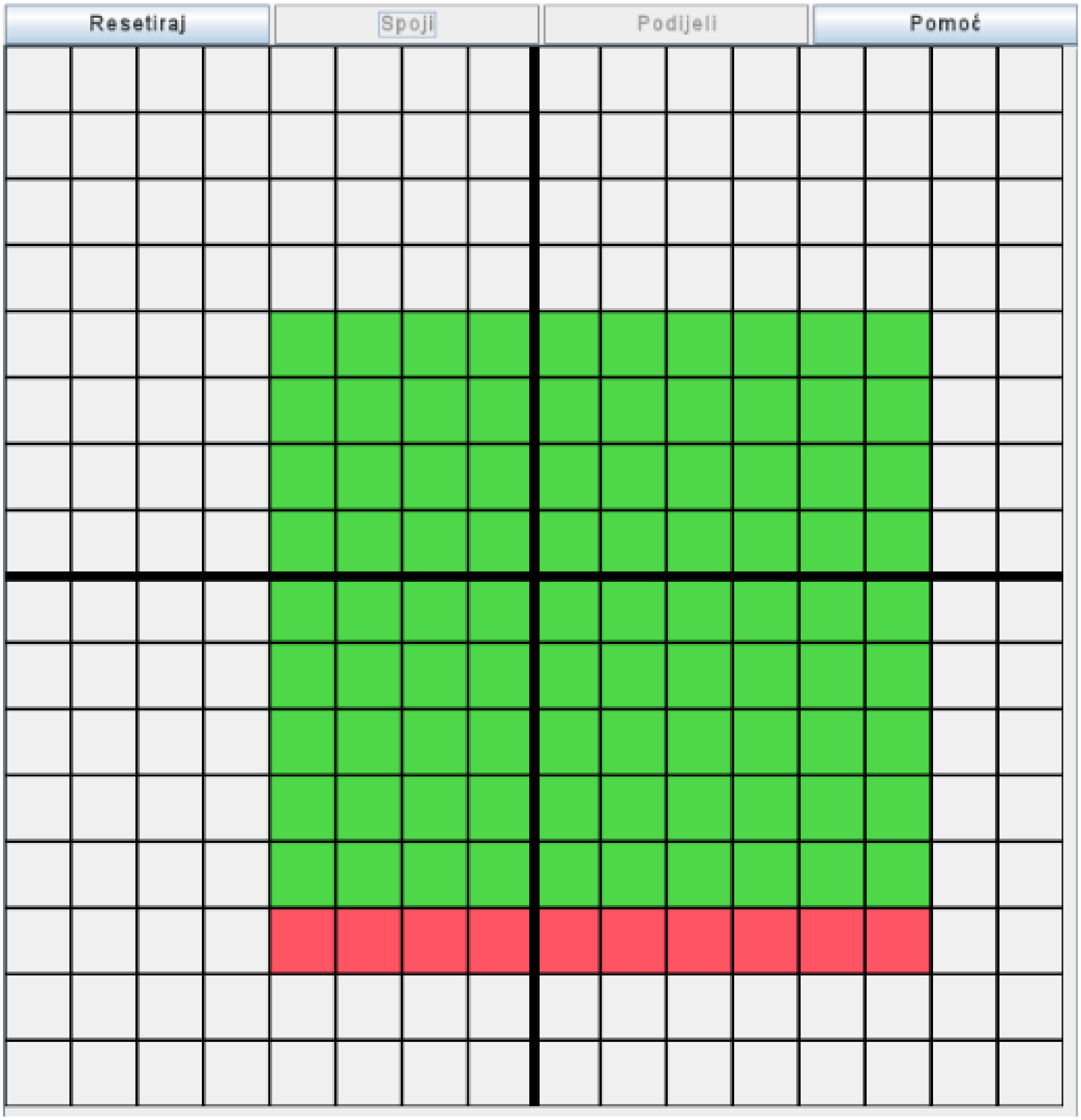
(a) Prvi poligon



(b) Drugi poligon

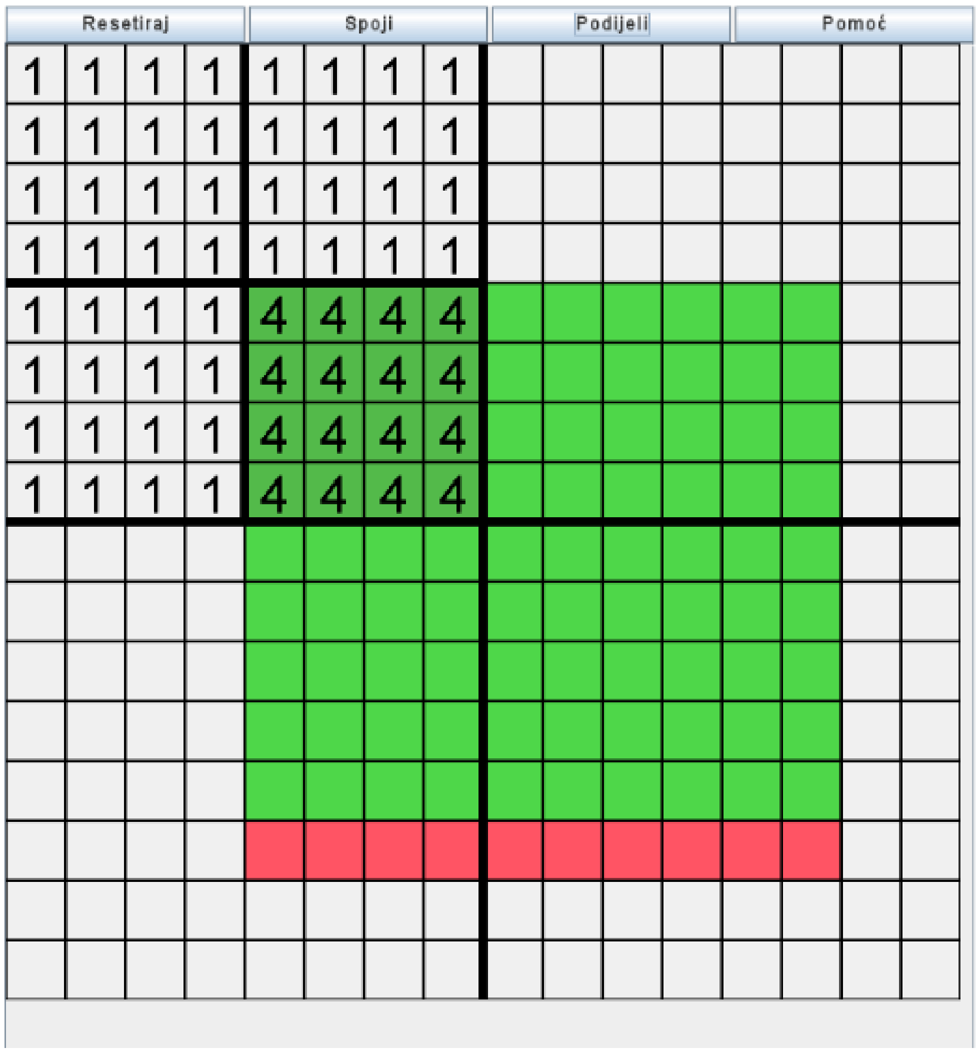
Slika 190: Oba poligona zasebno

Krenimo redom i podijelimo naš ekran na 4 dijela.



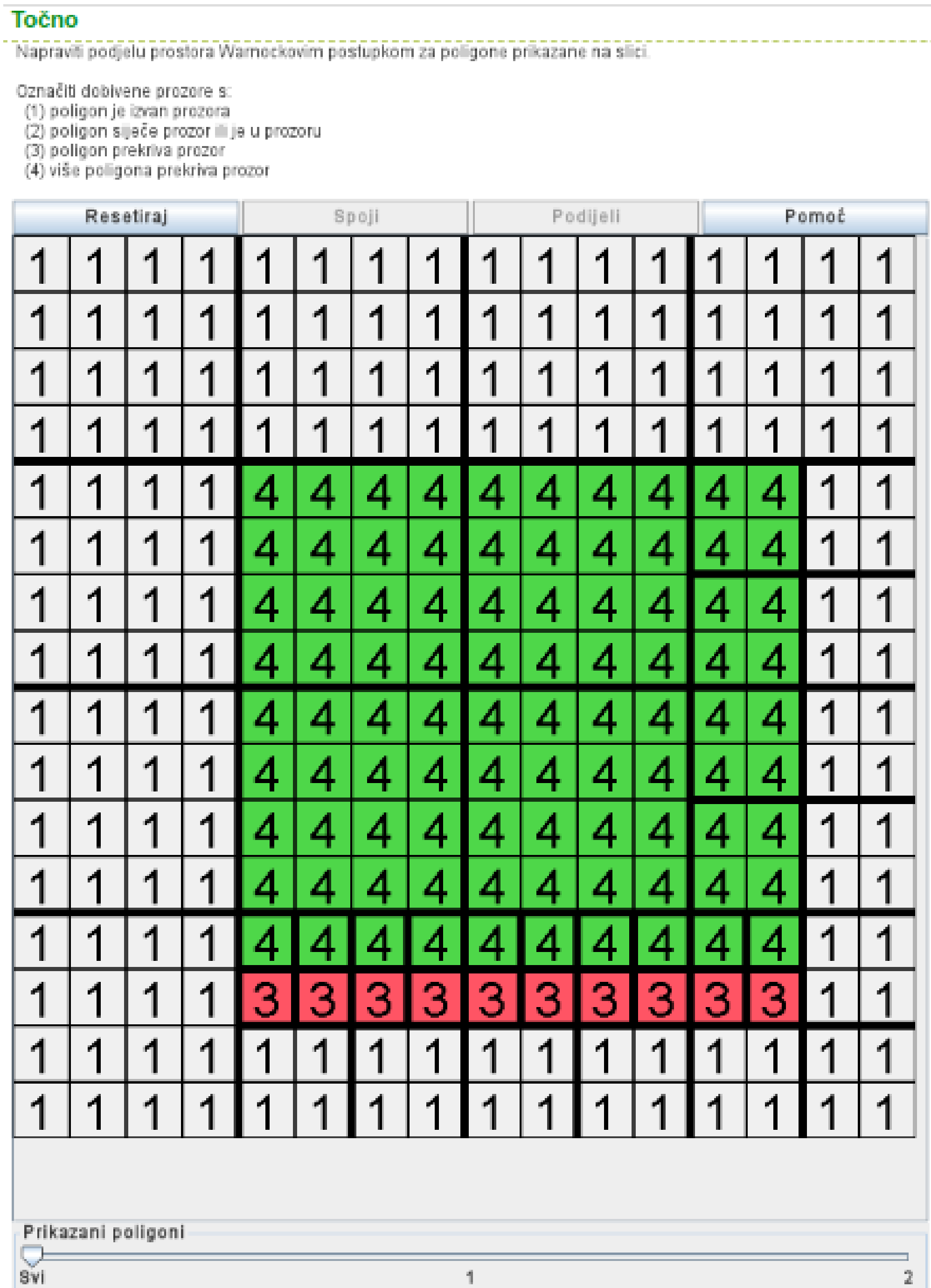
Slika 191: Prva podjela

Gledajmo sad gornji lijevi podprozor. Ne možemo jednoznačno odrediti koji je od 4 slučaja pa dijelimo dalje. Sada, od novodobivena 4 prozora možemo jednoznačno odrediti koji su od 4 slučaja i to upišemo u prozore. Prelazimo na desni podprozor, vidimo da ne možemo jednoznačno odrediti

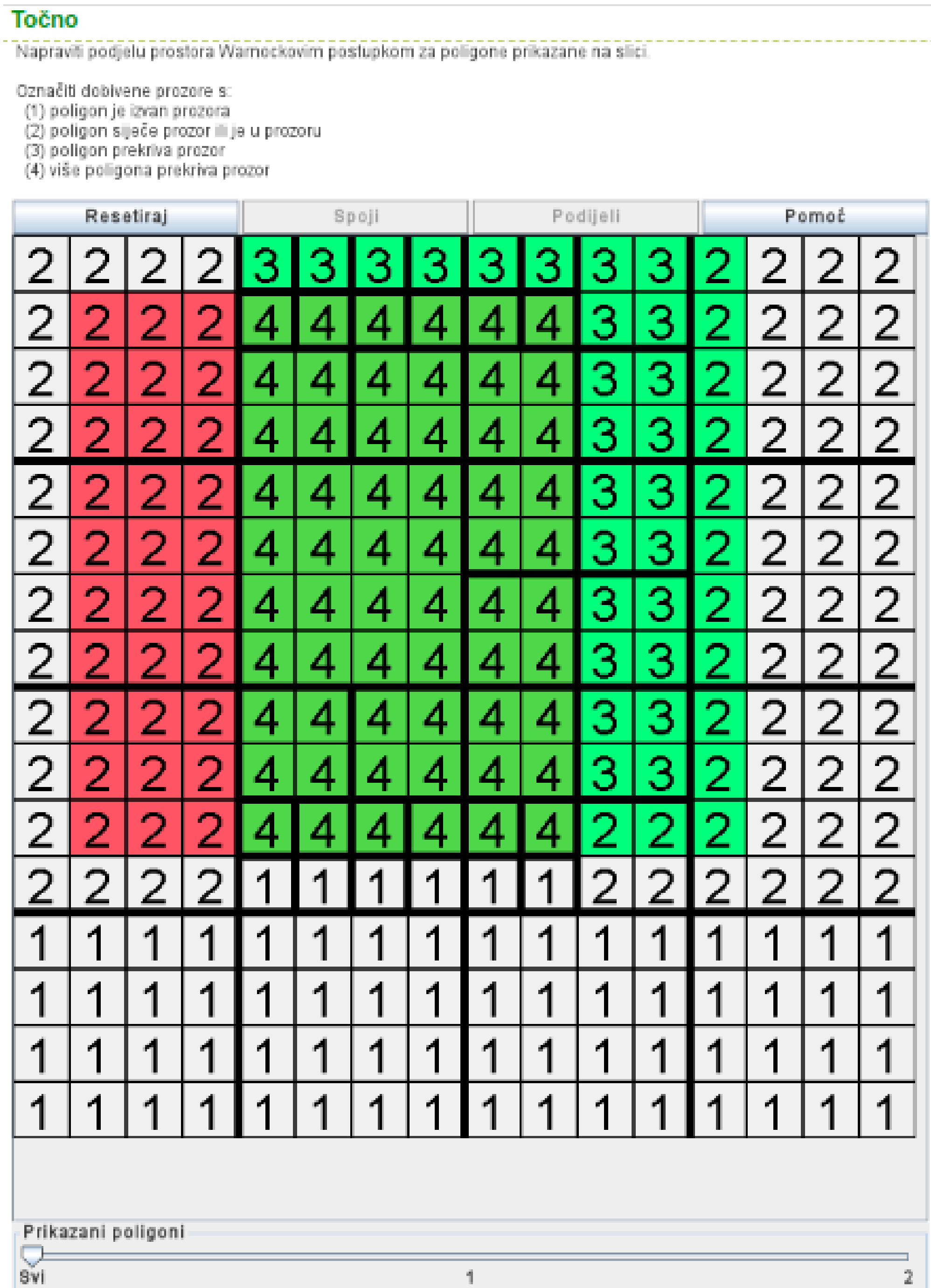


Slika 192: Druga podjela

koji je slučaj, dijelimo dalje. Tako nastavljamo dok nismo sve podprozore riješili. Konačno rješenje je oblika



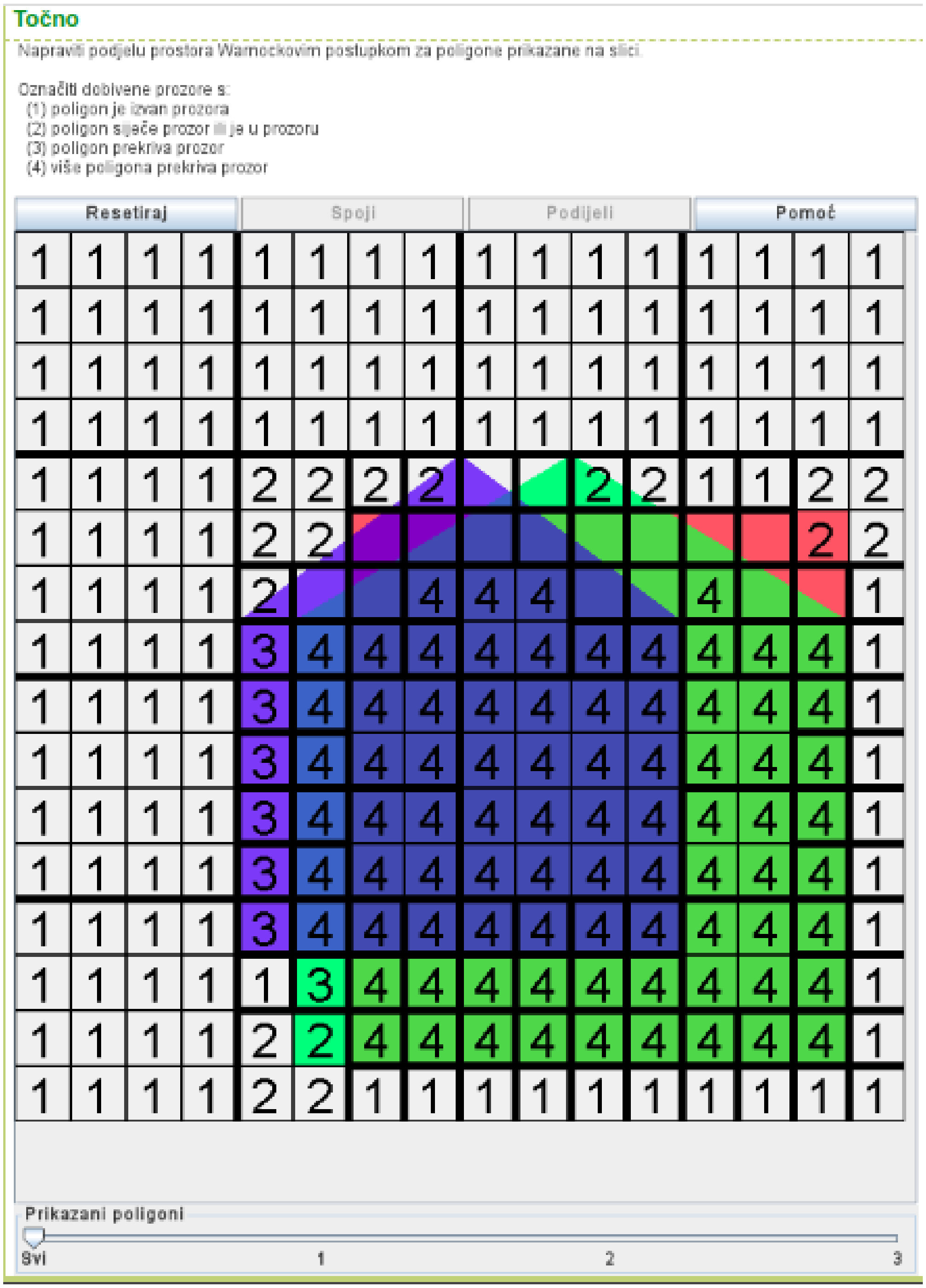
Slika 193: Zadatak riješen



Slika 194: Raznolikiji zadatak riješen - pojavio se slučaj 2.

7.5.2 Složeniji slučaj

Sličan je prethodnom zadatku, za dodatne informacije posjetiti 7.5.1. Složeniji slučaj se malo razlikuje od prethodnog u smislu da ako za neki prozor do konačne podjele ne možemo odlučiti koji je od 4 slučaja, taj prozor ostavimo bez broja. Nadalje, ako se dogodi da se u jednom prozoru preklapaju 2 poligona i 3 poligona, podjelu je potrebno nastaviti, jer nije jednoznačno koliko poligona je prikazano u istom prozoru. U ovom zadatku treba biti dosta oprezan, jer se može pojaviti mali dio poligona koji možda nećete opaziti, a trebali biste.



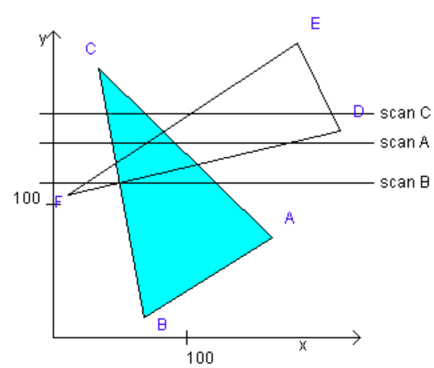
Slika 195: Zadatak riješen

7.6 Aktivni bridovi Watkinsov postupak

Sve o Watkinsovom postupku možete pronaći u knjizi na 201. stranici i nadalje.

Kako promatrajući algoritam za z-spremnik promatramo piksele, za Warnockov algoritam prozor rastavljamo na manje dijelove, tako kod Watkinsovog postupka vučemo linije po zaslonu, od najmanje vrijednosti y-koordinate do najveće vrijednosti y-koordinate. Prilikom toga, aktivni bridovi su oni bridovi koje ta linija siječe, a aktivni poligoni su poligoni koji sadrže aktivan brid. Iako se čini komplicirano, kad se detaljnije prouči napisano u knjizi, shvati se postupak detaljnije.

Za zadane poligone i linije skeniranja potrebno je pronaći aktivne bridove.
Napomena: Ukoliko je više aktivnih bridova za jednu liniju, potrebno ih je odvojiti razmakom (npr. AB BC EF)
Vrhovi ispunjenog poligona su A, B i C.



Tablica aktivnih bridova

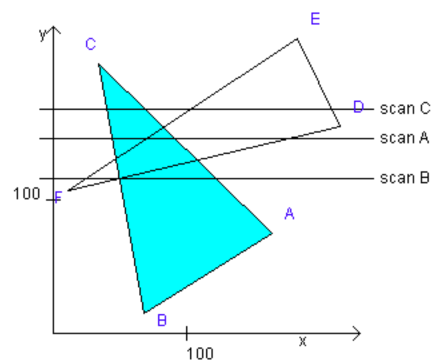
Linija Skeniranja	Aktivni Bridovi
Linija skeniranja A	
Linija skeniranja B	
Linija skeniranja C	

Slika 196: Zadatak

Sreća pa se u zadatku traži samo određivanje aktivnih bridova, a ne ispisivanje tablica koje se koriste pri Watkinsovom postupku. Kako bi se riješio zadatak potrebno je odrediti koje bridove siječe pojedina linija skeniranja.

Točno

Za zadane poligone i linije skeniranja potrebno je pronaći aktivne bridove.
Napomena: Ukoliko je više aktivnih bridova za jednu liniju, potrebno ih je odvojiti razmakom (npr. AB BC EF)
Vrhovi ispunjenog poligona su A, B i C.



Tablica aktivnih bridova

Linija Skeniranja	Aktivni Bridovi
Linija skeniranja A	BC EF AC DF
Linija skeniranja B	EF DF BC AC
Linija skeniranja C	BC AC EF DE

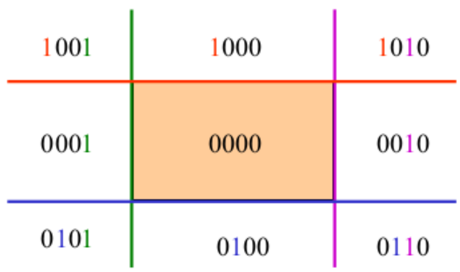
Slika 197: Zadatak riješen

7.7 Algoritam Cohen Sutherland

Više o algoritmu Cohen Sutherland možete pronaći u knjizi na stranici 223.

Algoritam Cohen Sutherland provjerava hoće li se linija (poligon) iscrtati na zadanom podprostoru ili neće. Točnije, on će provjeriti hoće li se postupak crtanja preskočiti ili ne.

Prostor se podijeli na devet dijelova i svakom dijelu se pridijeli četverobitni kod



Slika 198: Slika preuzeta iz knjige, pridjeljivanje koda dijelovima

Kod se pridjeljuje na sljedeći način ovisno gdje se točka nalazi:

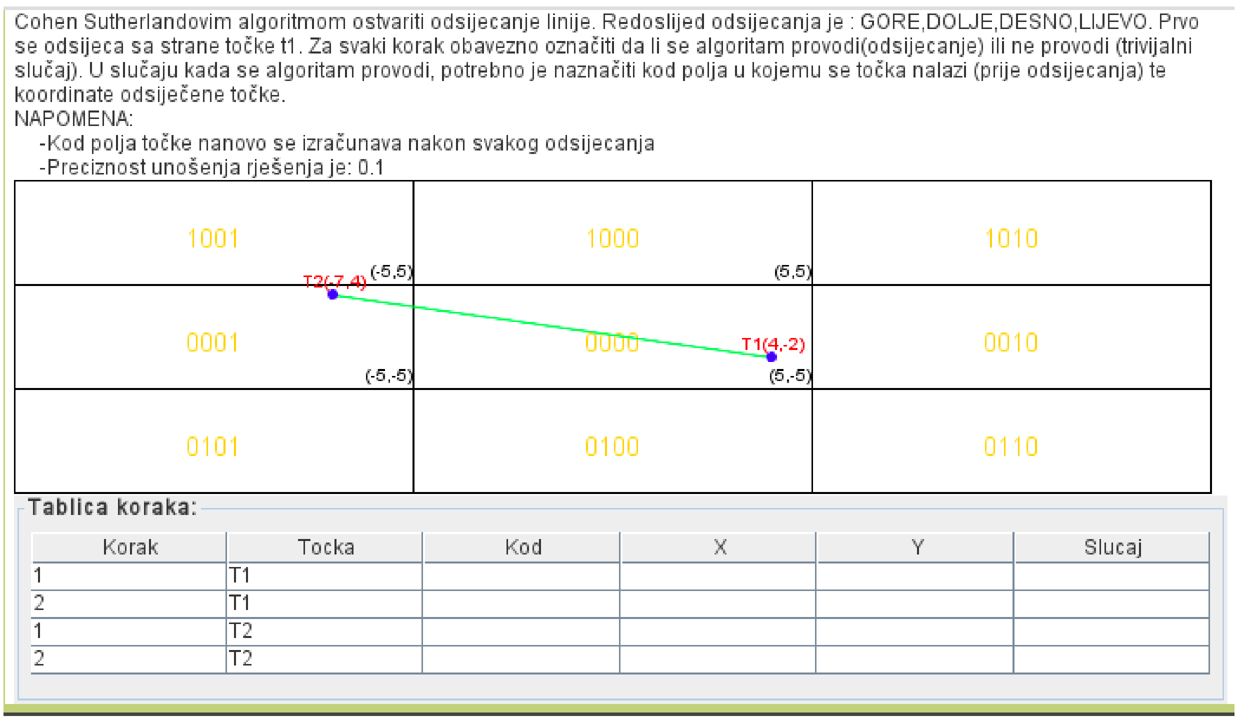
- prvi bit s lijeva se postavi u jedan ako je točka iznad y_{max}, inače 0
- drugi bit je jedan ako je točka ispod y_{min}, inače 0
- treći bit je jedan ako je točka desno od x_{max}, inače 0
- četvrti bit je jedan ako je lijevo od x_{min}, inače je 0
- ako je točka u vidljivom dijelu podprostora, svi njeni bitovi su 0

Kad su pridjeljeni kodovi svakoj točki dužine V_1V_2 počinje se s ispitivanjem.

- trivijalan slučaj - točke V_1 i V_2 se nalaze unutar prozora za crtanje i njihovi kodovi c_1 i c_2 su 0000

- ako nije trivijalan slučaj, onda se provodi operacija AND između c_1 i c_2
    - ako je taj rezultat različit od 0000 dužina trivijalno nije vidljiva (čitava je ispod, lijevo, desno ili iznad promatranog podprostora)
    - inače je potrebno odsijecanje dužine

Odsijecanje se provodi prema unaprijed zadanom redoslijedu što će biti pokazano kroz zadatak.



Korak	Tocka	Kod	X	Y	Slucaj
1	T1				
2	T1				
1	T2				
2	T2				

Slika 199: Zadatak

Vidimo da je u zadatku zadan redoslijed odsijecanja.

- GORE - prvi lijevi bit => $y_{max} = 5$
- DOLJE - drugi bit => $y_{min} = -5$
- DESNO - treći bit => $x_{max} = 5$
- LIJEVO - četvrti bit => $x_{min} = -5$

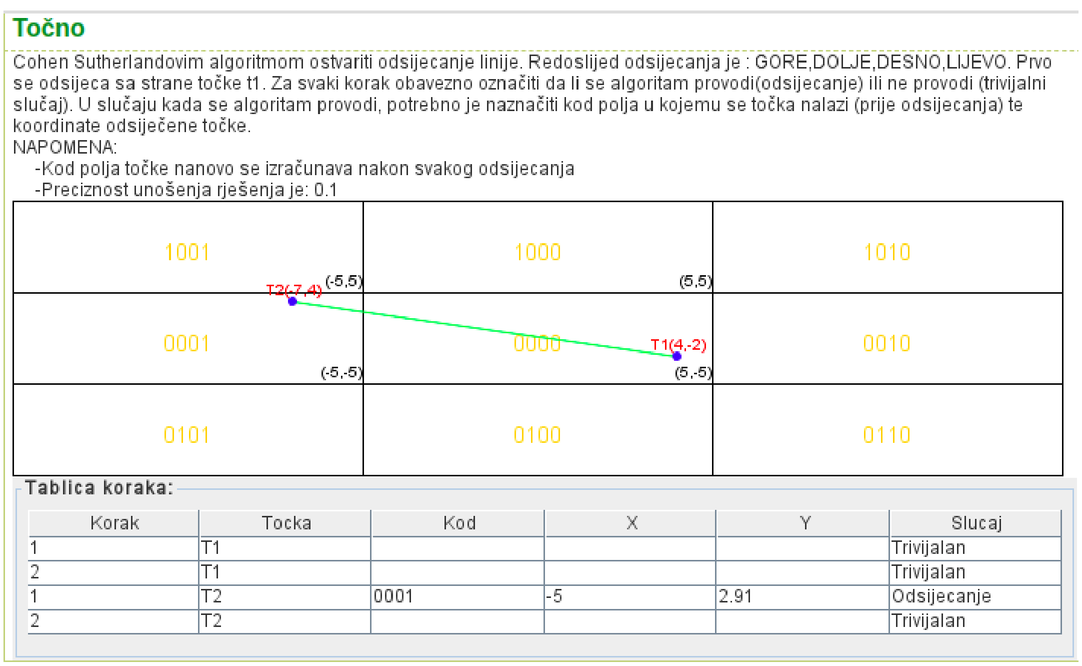
Uvijek prvo provesti AND između c_1 i c_2. Nadalje, vidimo da su koordinate točke T_1 unutar podprostora koji je 0000 te u oba koraka kod točke T_1 stavljamo **Trivijalan**.

Što se tiče točke T_2, vidimo da je njen kod $c_2 = 0001$ i to upisujemo pod stupac Kod redak $Korak1$. To znači, pošto je četvrti bit u jedinici da je potrebno LIJEVO odsijecanje, odnosno odsijecanje dužine T_1T_2 s pravcem $x_{min} = -5$.

To odsijecanje se radi na način da izračunamo pravac na kojem leži ta dužina i riješimo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice kako bismo dobili točku koja će se vidjeti. Jednadžba pravca je:

$$6x + 11y = 2$$

Kada nađemo presjek tog pravca i pravca $x = -5$, dobili smo y koordinatu koju je potrebno upisati u tablicu ($y = 2.91$). Nakon toga je i točka T_2 vidljiva i njen kod postaje 0000. To nije potrebno upisivati u tablicu. Mogu



Korak	Tocka	Kod	X	Y	Slucaj
1	T1				Trivijalan
2	T1				Trivijalan
1	T2	0001	-5	2.91	Odsijecanje
2	T2				Trivijalan

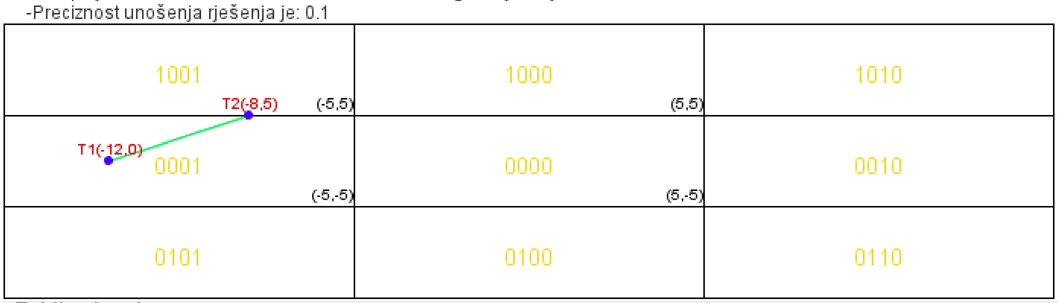
Slika 200: Zadatak riješen

se pojaviti i malo zeznutiji slučajevi. Ako je jedna od točaka na granici između dijelova prozora onda uzimamo

- ako je točka između prozora s kodom 0000 i bilo kojeg drugog prozora, kod točke je 0000
- ako je između dva prozora i nijedan od njih nije 0000, kod točke je onaj koji je prije po redoslijedu odsijecanja

Točno

Cohen Sutherlandovim algoritmom ostvariti odsijecanje linije. Redoslijed odsijecanja je : GORE,DOLJE,DESNO,LIJEVO. Prvo se odsijeca sa strane točke t1. Za svaki korak obavezno označiti da li se algoritam provodi(odsijecanje) ili ne provodi (trivijalni slučaj). U slučaju kada se algoritam provodi, potrebno je naznačiti kod polja u kojemu se točka nalazi (prije odsijecanja) te koordinate odsiječene točke.
NAPOMENA:
-Kod polja točke nanovo se izračunava nakon svakog odsijecanja
-Preciznost unošenja rješenja je: 0.1



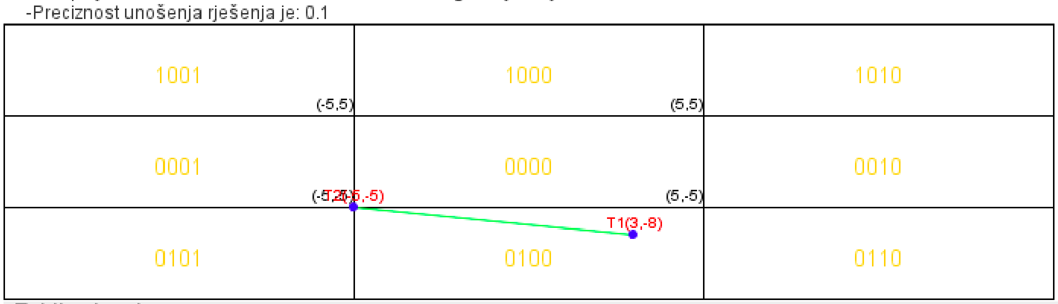
Tablica koraka:

Korak	Tocka	Kod	X	Y	Slucaj
1	T1				Trivijalan
2	T1				Trivijalan
1	T2				Trivijalan
2	T2				Trivijalan

Slika 201: Zadatak 2 riješen - dovoljno je da se napravi AND između c_1 i c_2

U ovom posljednjem slučaju na slici 203 se dogodi sljedeće. Nakon prvog odsijecanja točke T_1, točka T_1 padne u područje 1010 koje kad se AND-a sa c_2 automatski da trivijalno rješenje da dužina ne prolazi prozorom.

Cohen Sutherlandovim algoritmom ostvariti odsijecanje linije. Redoslijed odsijecanja je : GORE,DOLJE,DESNO,LIJEVO. Prvo se odsijeca sa strane točke t1. Za svaki korak obavezno označiti da li se algoritam provodi(odsijecanje) ili ne provodi (trivijalni slučaj). U slučaju kada se algoritam provodi, potrebno je naznačiti kod polja u kojemu se točka nalazi (prije odsijecanja) te koordinate odsiječene točke.
NAPOMENA:
-Kod polja točke nanovo se izračunava nakon svakog odsijecanja
-Preciznost unošenja rješenja je: 0.1

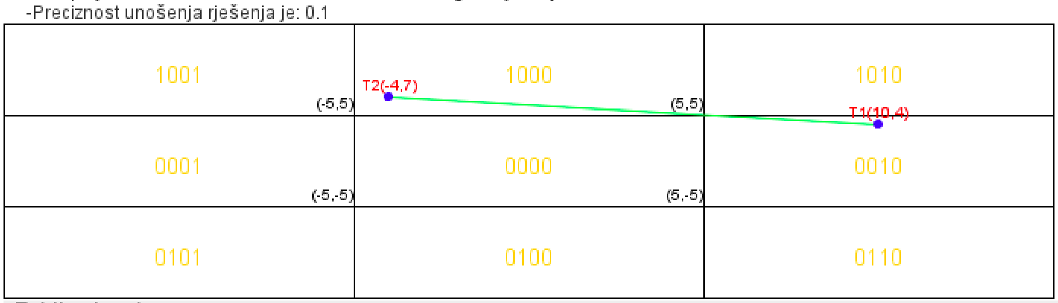


Tablica koraka:

Korak	Tocka	Kod	X	Y	Slucaj
1	T1	0100	-5.0	-5.0	Odsijecanje
2	T1				Trivijalan
1	T2				Trivijalan
2	T2				Trivijalan

Slika 202: Zadatak 3 riješen

Cohen Sutherlandovim algoritmom ostvariti odsijecanje linije. Redoslijed odsijecanja je : GORE,DOLJE,DESNO,LIJEVO. Prvo se odsijeca sa strane točke t1. Za svaki korak obavezno označiti da li se algoritam provodi(odsijecanje) ili ne provodi (trivijalni slučaj). U slučaju kada se algoritam provodi, potrebno je naznačiti kod polja u kojemu se točka nalazi (prije odsijecanja) te koordinate odsiječene točke.
NAPOMENA:
-Kod polja točke nanovo se izračunava nakon svakog odsijecanja
-Preciznost unošenja rješenja je: 0.1



Tablica koraka:

Korak	Tocka	Kod	X	Y	Slucaj
1	T1	0010	5.0	5.071	Odsijecanje
2	T1				Trivijalan
1	T2				Trivijalan
2	T2				Trivijalan

Slika 203: Zadatak 4 riješen

7.8 Algoritam Cyrus Beck

Detaljnije o algoritmu možete pronaći u knjizi na stranici 226.

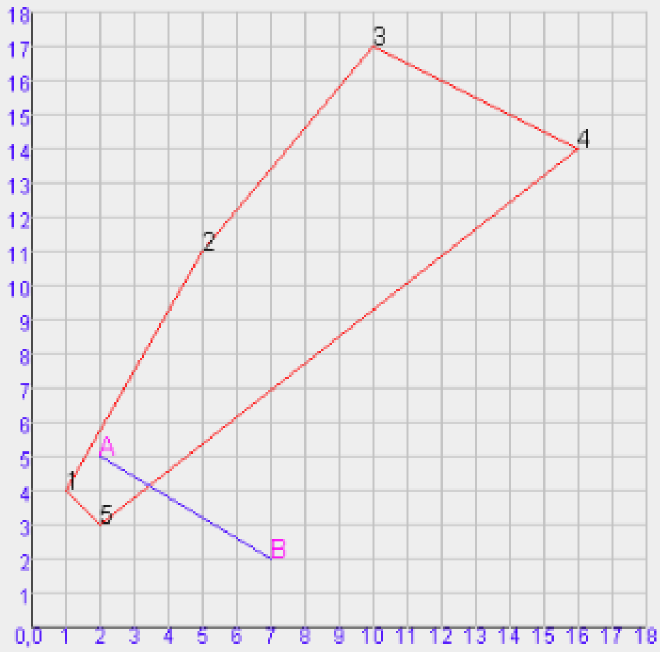
Taj algoritam se koristi kako bi se odredila potencijalno ulazna i potencijalno izlazna sjecišta dužine i tijela.
Formula za t koji čini probodište je:

$$t = \frac{\vec{n_i} \cdot (P_0 - P_{Ei})}{-\vec{n_i} \cdot D} \tag{58}$$

Gdje je n_i vektor normale poligona u 3D ili brida u 2D. P_0 je početna točka dužine, P_{Ei} je vrh poligona (može biti i točka na poligonu), a $D = P_1 - P_0$ gdje je P_1 krajnja točka dužine. Objašnjenje formule možete pronaći u knjizi.

Prvo postavimo inicijalne vrijednosti $PE = 0$ (point entering) i $PL = 1$ (point leaving). Kada određujemo potencijalno ulazna, odnosno potencijalno izlazna sjecišta, gledamo kut između normale poligona i vektora D ($D = P_1 - P_0$) odnosno umnožak $\vec{n_i} \cdot D$. Ako je umnožak negativan točka je potencijalno ulazna, PE postavljamo na $PE = t$, inače je potencijalno izlazna, što znači da PL postavljamo na $PL = t$. Na taj način smo rasporedili sve točke na PE i PL. Izbor najvećeg PE i najmanjeg PL dat će traženo odsijecanje. Da biste shvatili zašto je to tako pogledajte sliku 8.24 u knjizi.

Zadane su točke poligona u *smjeru kazaljke na satu* (vidi sliku).
Koristeći Cyrus-Beck algoritam pronađite presjecišta dužine AB odnosno, potencijalno ulazne te potencijalno izlazne točke.
Potrebno je navesti parametar t za svaku potencijalno ulaznu odnosno izlaznu točku.



Napomena:

- Brojeve unosite odvojene zarezom. Dodani razmaci nemaju utjecaja na rezultat osim ukoliko se nalaze unutar samog broja.
- Za razdvajanje cijelog dijela broja od decimalnog dijela koristite decimalnu tocku! Rjesenja unutar intervala od 0.05 od točnog rješenja biti će prihvaćena.
- Potrebno je navesti sve moguće parametre t, neovisno o tome da li je t < 0 odnosno t > 1.
- U točki A parametar t = 0, a u točki B parametar t = 1!
- Ukoliko je točka A unutar poligona tada je ulazna točka t = 0. Ukoliko je točka B unutar poligona onda za izlaznu točku vrijedi t = 1. U navednim slučajevima te vrijednosti ne upisuju se pod potencijalno ulazne/izlazne točke.

Parametar t za sve potencijalno ulazne točke:

Parametar t za sve potencijalno izlazne točke:

Parametar t za ulaznu točku:

Parametar t za izlaznu točku

Slika 204: Zadatak

Prva stvar na koju je potrebno pripaziti u zadatku je orijentacija točaka poligona. U ovom slučaju je to CW. Krenimo onda redom. Inicijalizirat ćemo $PE = 0$ i $PL = 1$. Sve točke se očitaju iz koordinatnog sustava i izračunaju se normale.

Normale je najjednostavnije izračunati preko vektorskog umnoška i on osigurava orijentaciju. U ovom slučaju je problem što je sve zadano u 2D pa nije moguće računati vektorski umnožak, ali iskoristit ćemo činjenicu da poznajemo rad u homogenom prostoru. To samo znači da ćemo svemu dodati kao z koordinatu jedinicu.

Vektorskim umnoškom početne točke brida i završne točke brida dobijemo normalu brida. Stoga normale redom glase:

$$V_1 \times V_2 = \vec{n_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$V_2 \times V_3 = \vec{n_2} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$V_3 \times V_4 = \vec{n_3} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$V_4 \times V_5 = \vec{n_4} = \begin{bmatrix} 11 & -14 \end{bmatrix}$$

$$V_5 \times V_1 = \vec{n_5} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Treći broj koji se dobije može se odbaciti jer normala je dvodimenzionalna.

Nakon toga računamo t-ove po formuli 58 i umnoškom $\vec{n_i} \cdot D$ provjeravamo je li točka PE ili PL.

$$t_1 = \frac{\vec{n_1} \cdot (A - V_1)}{-\vec{n_1} \cdot (B - A)} = -\frac{3}{47} = -0.064$$

$$\vec{n_1} \cdot D = -47$$

što znači da je $t_1 = PE$. Tako isto napravimo i za ostale bridove te dobijemo redom

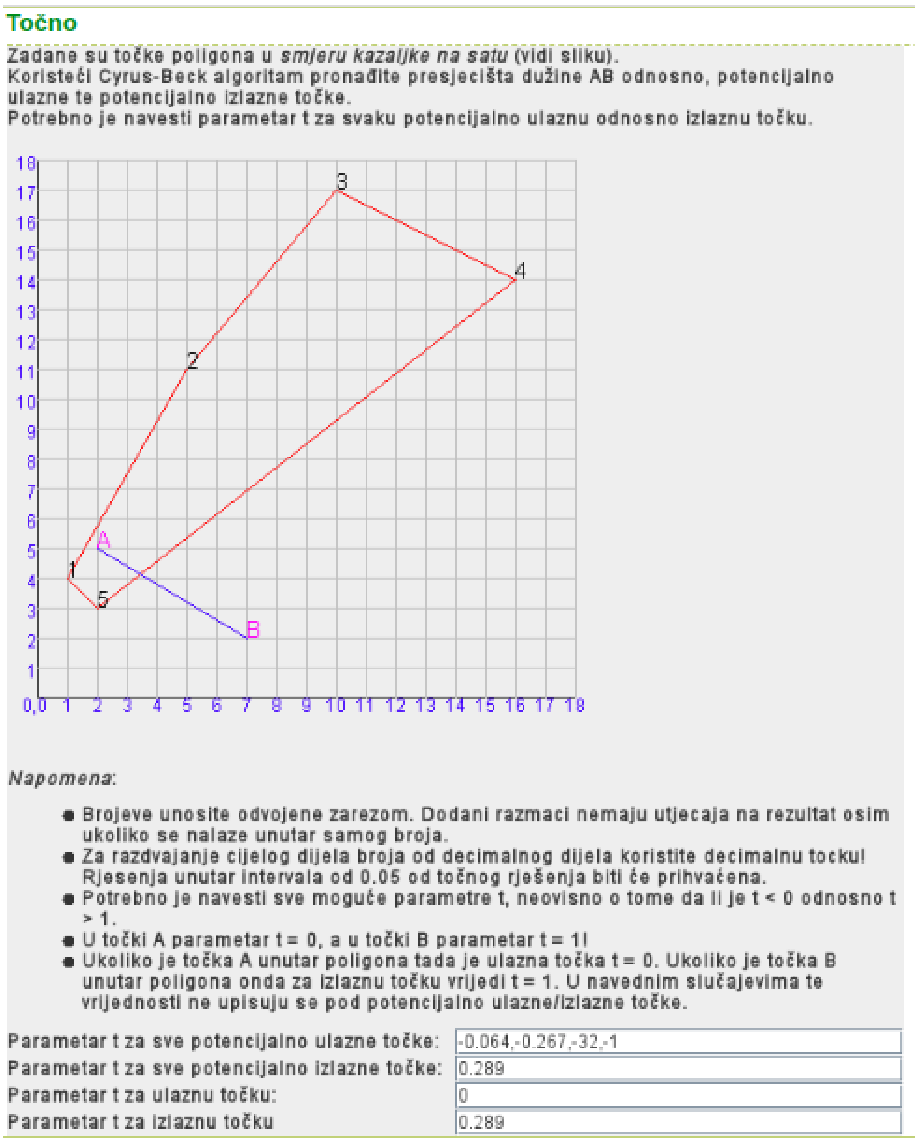
$$t_2 = -0.267 = PE$$

$$t_3 = -32 = PE$$

$$t_4 = 0.289 = PL$$

$$t_5 = -1 = PE$$

Uz to sve, znamo da još imamo i inicijalizirane vrijednosti $PE = 0$ i $PL = 1$ i kada sve to uzmemo u obzir, biramo najveću vrijednost PE i najmanju vrijednost PL kako bismo dobili konačne rezultate.



Slika 205: Zadatak riješen

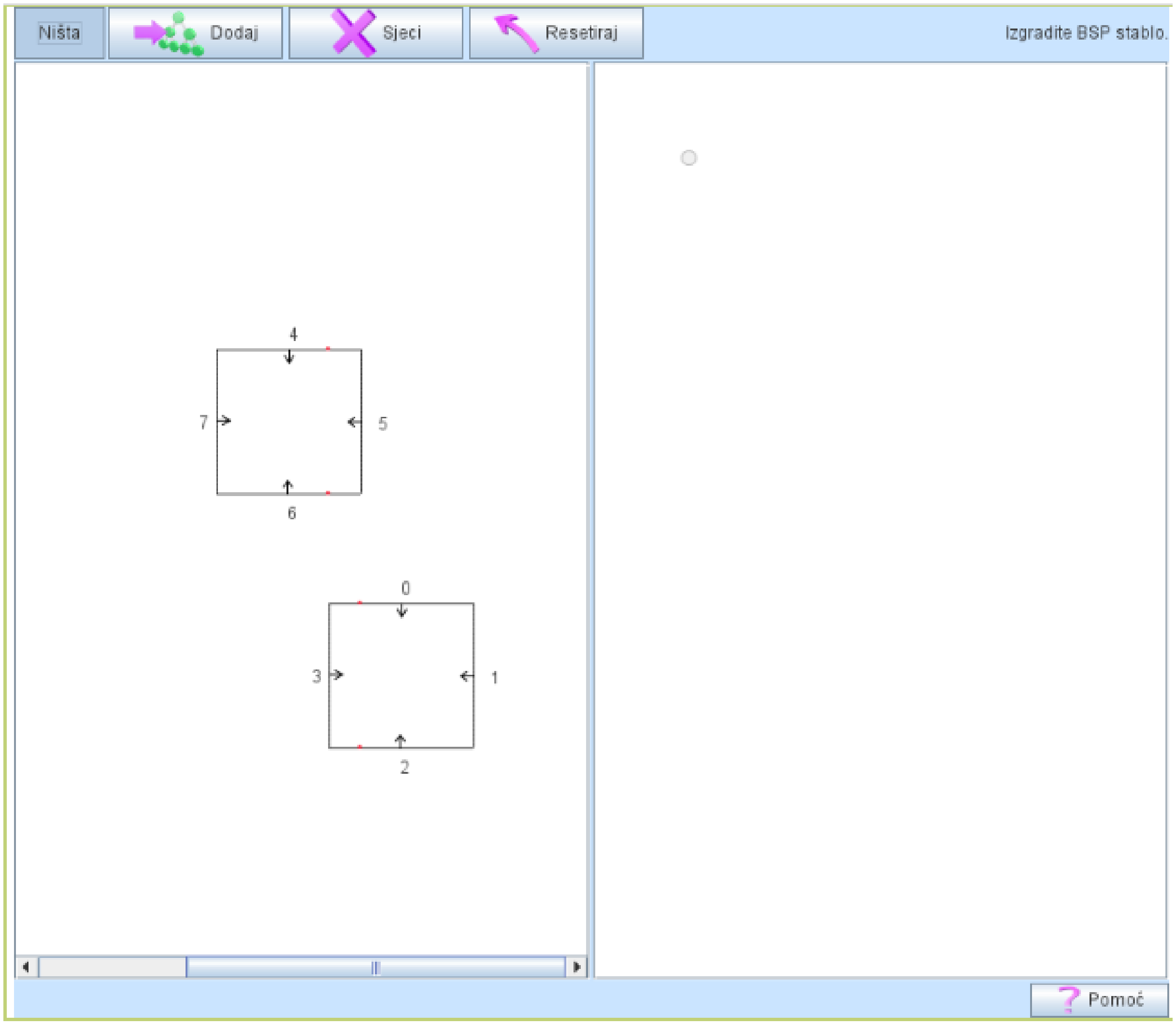
7.9 Stvaranje BSP stabla

Sve o BSP stablima možete pronaći u knjizi na stranici 228 i nadalje.

U suštini, BSP stabla se koriste kako bi se prostor podijelio na dijelove kako bi ga se kasnije moglo efikasnije pretraživati. BSP stablo se stvara na sljedeći način:

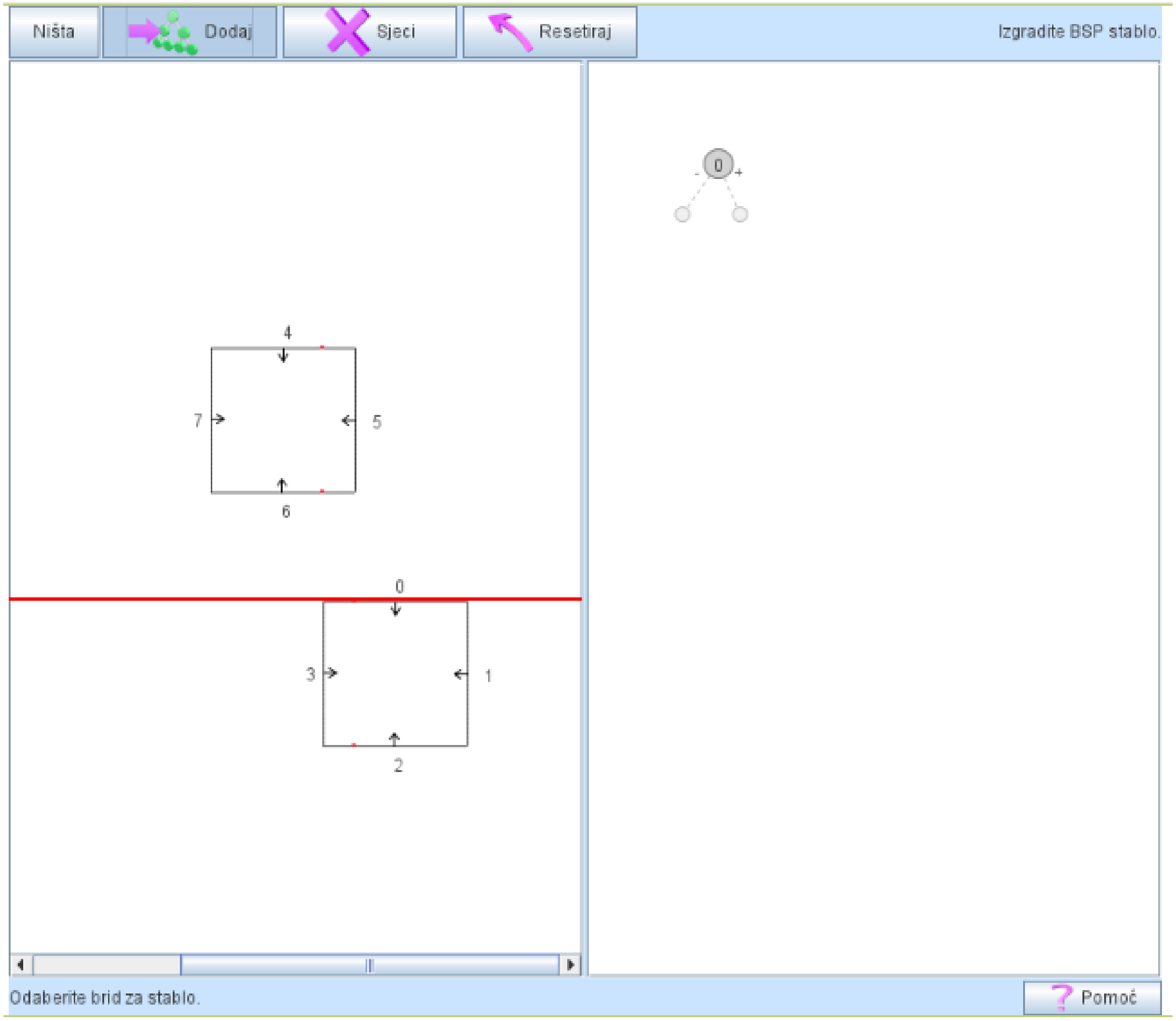
- uzmi bilo koji brid kao početni
- podijeli prostor na podprostor iznad brida i na podprostor ispod brida
  - ako prilikom podjele na podprostor, jedan od bridova prostora siječe pravac podjele, presijeci taj brid na dva dijela i svakom dijelu dodijeli novi ID
- odaberi jedan brid koji će se nalaziti u desnoj grani stabla - najčešće bridovi koji su iznad odabranog
- odaberi jedan brid koji će se nalaziti u lijevoj grani stabla - najčešće bridovi koji su ispod odabranog stabla

Nakon inicijalne podjele, promatramo novoodabrane čvorove te nastavljamo s podjelom prostora, na isti način, dok ne ostanemo bez bridova koje možemo dodati u stablo.



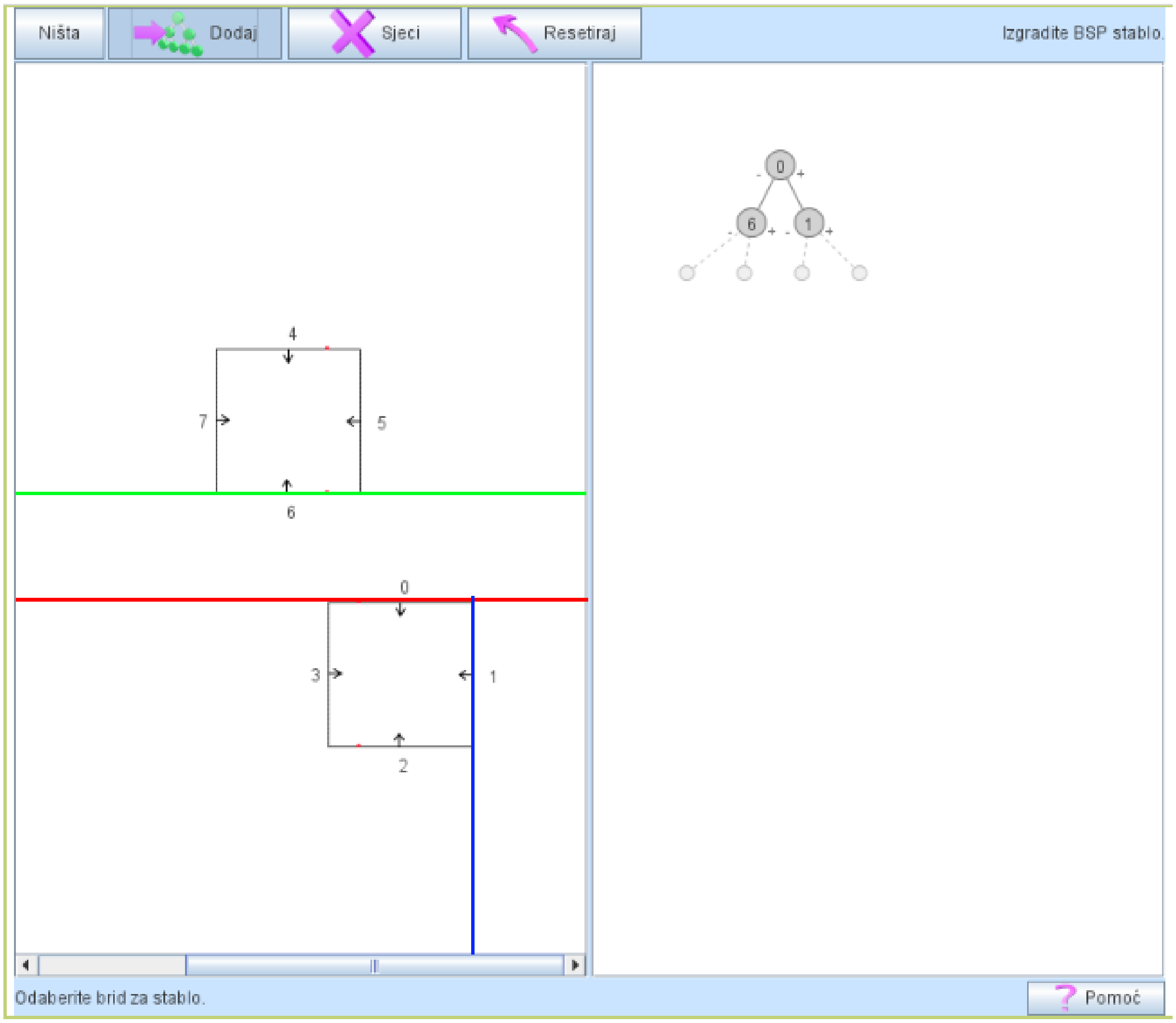
Slika 206: Zadatak

Odaberimo, npr., brid 0 kao čvor stabla koje gradimo.



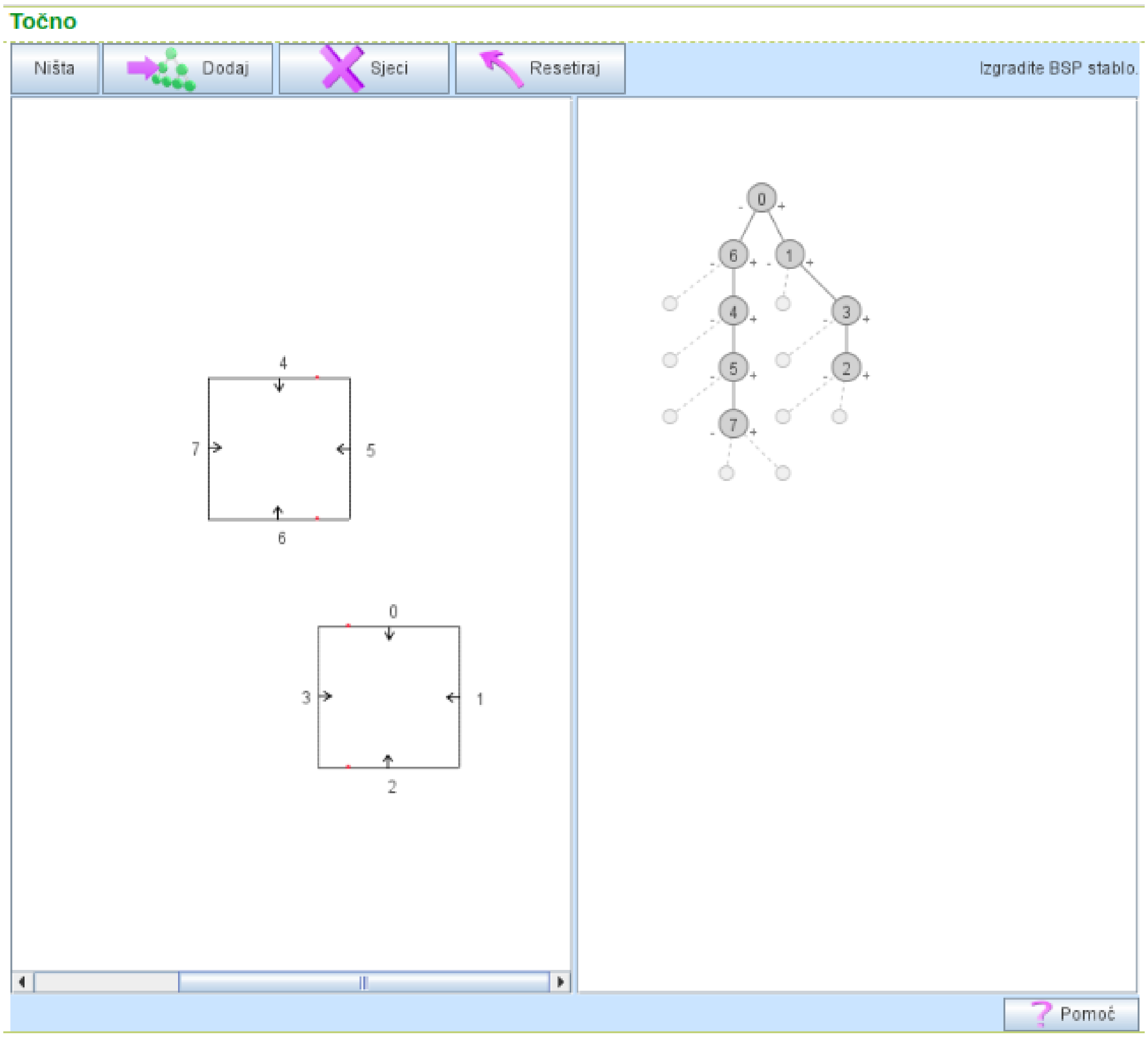
Slika 207: Prikaz podjele prostora nakon odabira početnog čvora

Nakon toga biramo koji brid ćemo staviti na + stranu stabla (odnosno koji brid ćemo odabrati koji se nalazi iznad brida 0), a koji na - (ispod). Pazite, strelica (->) pokazuje što je iznad brida, a što ispod. Uzmimo na primjer iznad 1, ispod 6. I tako nastavljamo dok ne ostanemo bez bridova



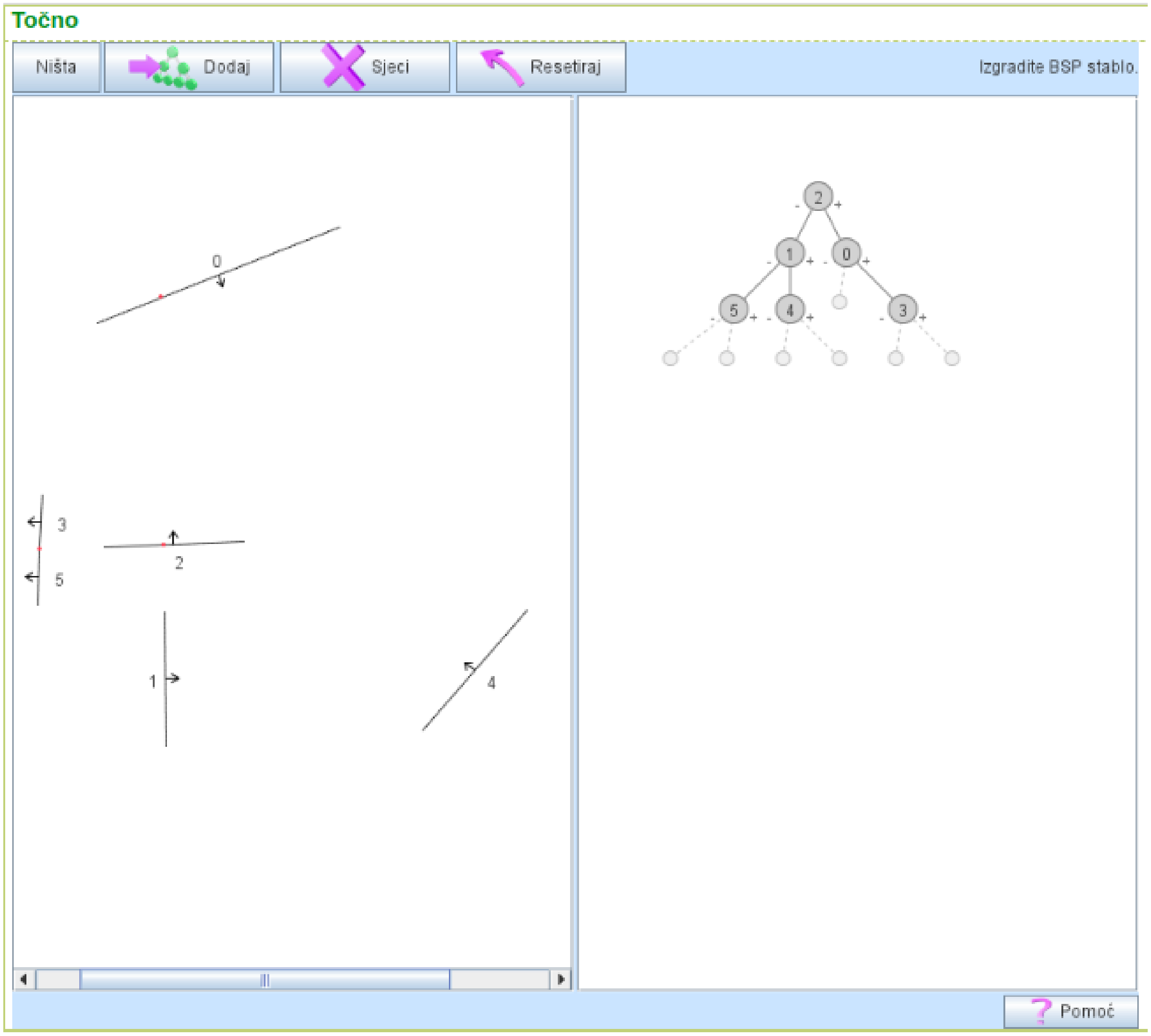
Slika 208: Prikaz podjele prostora nakon odabira lijevog i desnog čvora

koje možemo dodati u stablo.



Slika 209: Zadatak riješen

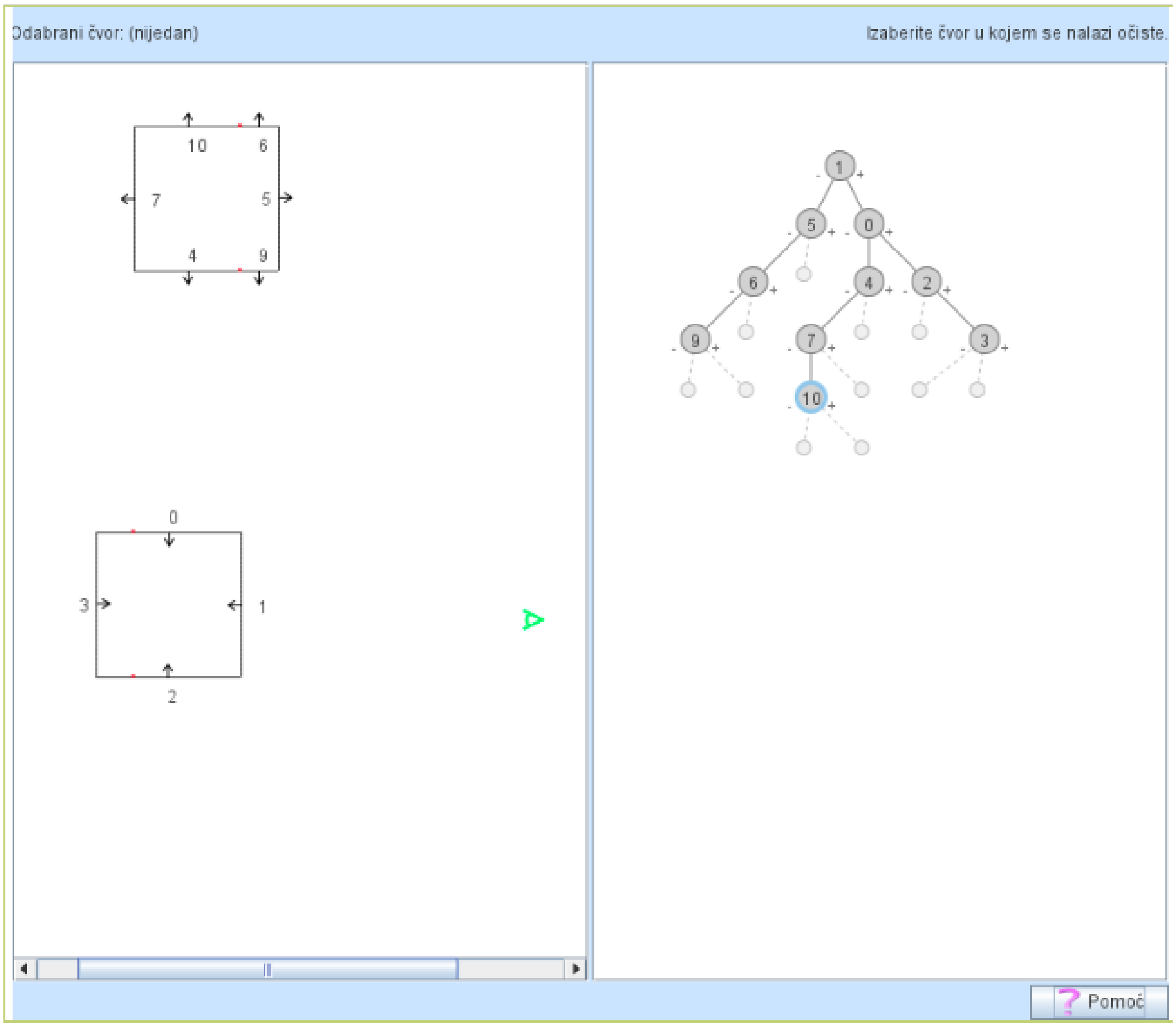
Ovo nije jedino moguće rješenje, ovisno o čvoru koji odaberemo kao korijen, postoji mnogo drugih točnih rješenja.



Slika 210: Zadatak u kojem se pojavila podjela brida na dva dijela riješen

7.10 Pretraživanje BSP stabla

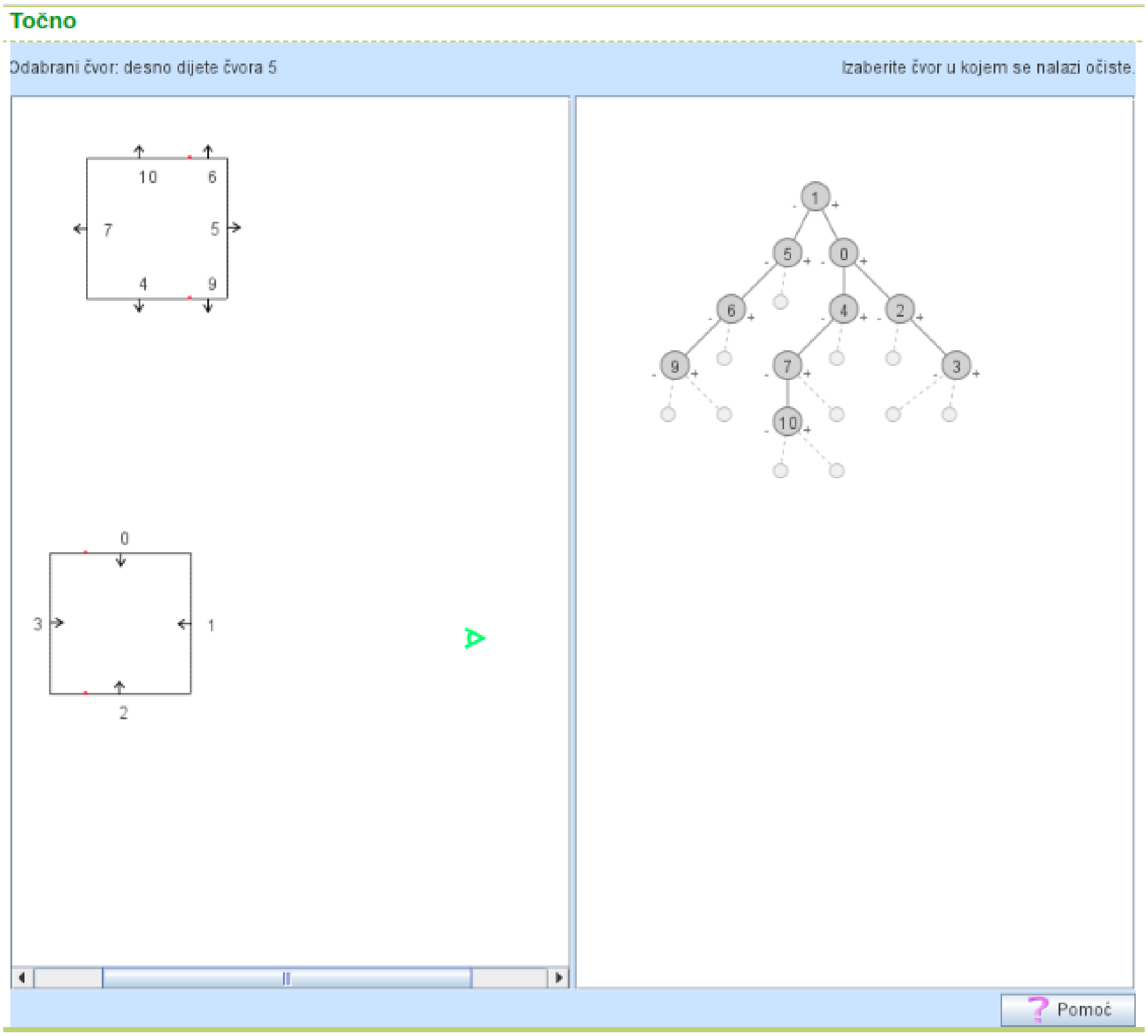
Sve o BSP stablima možete pronaći 7.9.



Slika 211: Zadatak

Krenemo redom s korijenom. Vidimo da se točka nalazi ispod brida 1, stoga nastavljamo u lijevu (-) granu stabla. Tu nalijećemo na brid 5. Vidimo da se očište nalazi iznad brida 5, te idemo u desnu (+) granu stabla. Pošto u toj grani nema čvorova, zaključujemo da bi se očište nalazilo u desnom

djetetu čvora 5.
Ovo što mi "vidimo" u računalu bi se interpretiralo tako da bismo točku uvrstili u jednadžbu pravca na kojem leži brid i na temelju rezultata odredili u koju granu treba ići.



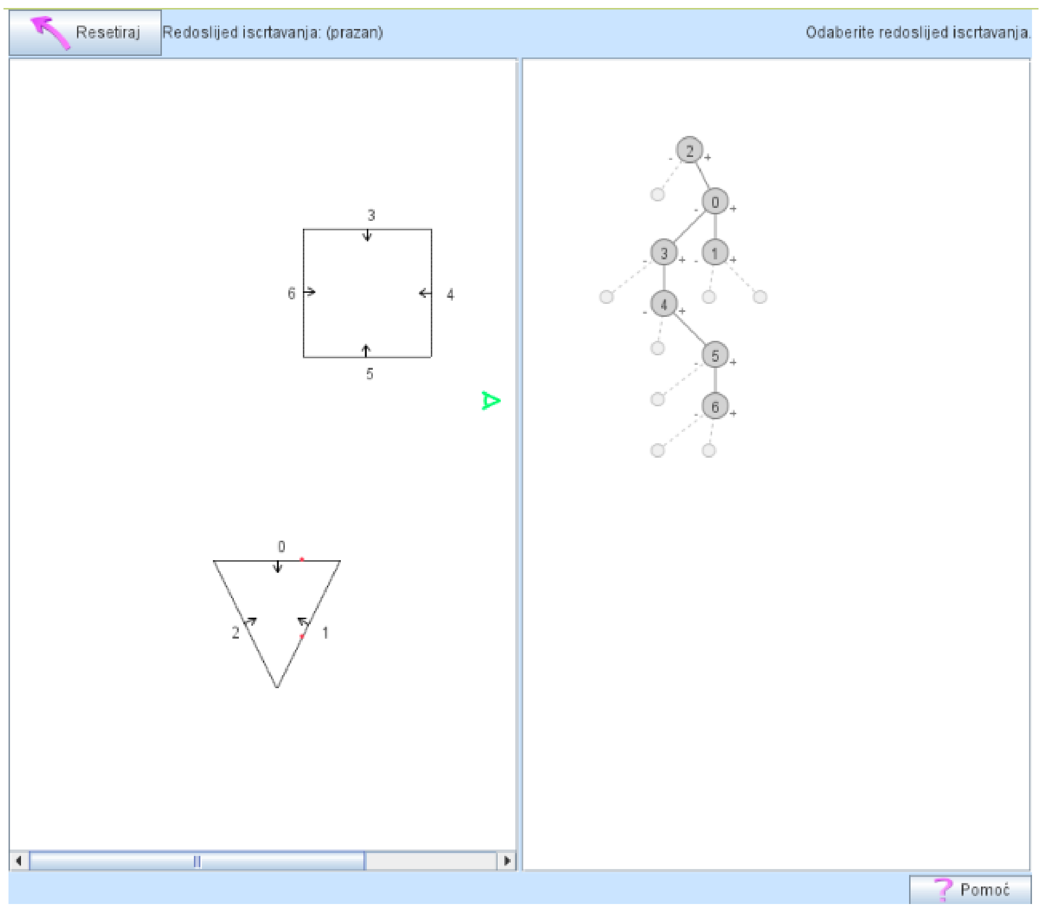
Slika 212: Zadatak riješen

7.11 Sortiranje pomoću BSP stabla

Sortiranje BSP stabla je opisano u knjizi na stranicama 231 i 232.

Ukratko postupak se temelji na određivanju gdje se očište nalazi s obzirom na dobiveno stablo. Algoritam je oblika:

- ako je očište s pozitivne strane promatranog brida, obiđi cijelu negativnu, čvor pa pozitivnu
- ako je očište s negativne strane promatranog brida, obiđi cijelu pozitivnu, čvor pa negativnu



Slika 213: Zadatak

Pa krenimo od korijenskog čvora 2. Pogledajmo gdje se nalazi očište s obzirom na brid 2. Očište je s pozitivne strane što znači da prvo obilazimo cijelu negativnu (-) stranu stabla, pa čvor 2 te naposlijetku pozitivnu stranu (+). Kako čvor 2 nema negativne strane, njega upisujemo na prvo mjesto, tj. on će se prvi iscrtati.

2

Nakon toga promatramo pozitivnu stranu čvora 2, a to je čvor 0. S obzirom na brid 0, očište se nalazi iza, tj. s negativne strane brida 0. To znači da ćemo prvo obići pozitivnu stranu čvora 0, čvor 0 pa negativnu. Pošto prvo obilazimo pozitivnu stranu, dolazimo do čvora 1, kako on nema ispod sebe nikoga, dodajemo ga u listu redoslijeda iscrtavanja.

21

Nakon toga se vraćamo u čvor 0 i iscrtavamo ga

210

Te obilazimo negativnu stranu čvora 0. To je čvor 3. S obzirom na brid 3, očište je s pozitivne strane, stoga prvo obilazimo negativnu stranu čvora 3, čvor 3 pa pozitivnu. Kako čvor 3 nema negativne strane, vraćamo se na njega i iscrtavamo ga

2103

te idemo na čvor 4. S obzirom na brid 4, očište je s negativne strane, što znači da obilazimo pozitivnu stranu čvora 4, čvor 4 pa negativnu. Pošto prvo obilazimo pozitivnu stranu, dolazimo do čvora 5, čvor 4 ostaje zapamćen. S obzirom na brid 5, očište je na negativnoj strani što znači da obilazimo pozitivnu, čvor 5 pa negativnu. Pošto prvo obilazimo pozitivnu stranu čvora 5, dolazimo do čvora 6. Kako čvor 6 nema djece, njega iscrtavamo i vraćamo se unatrag.

21036

Na povratku nailazimo na čvor 5 i iscrtavamo ga

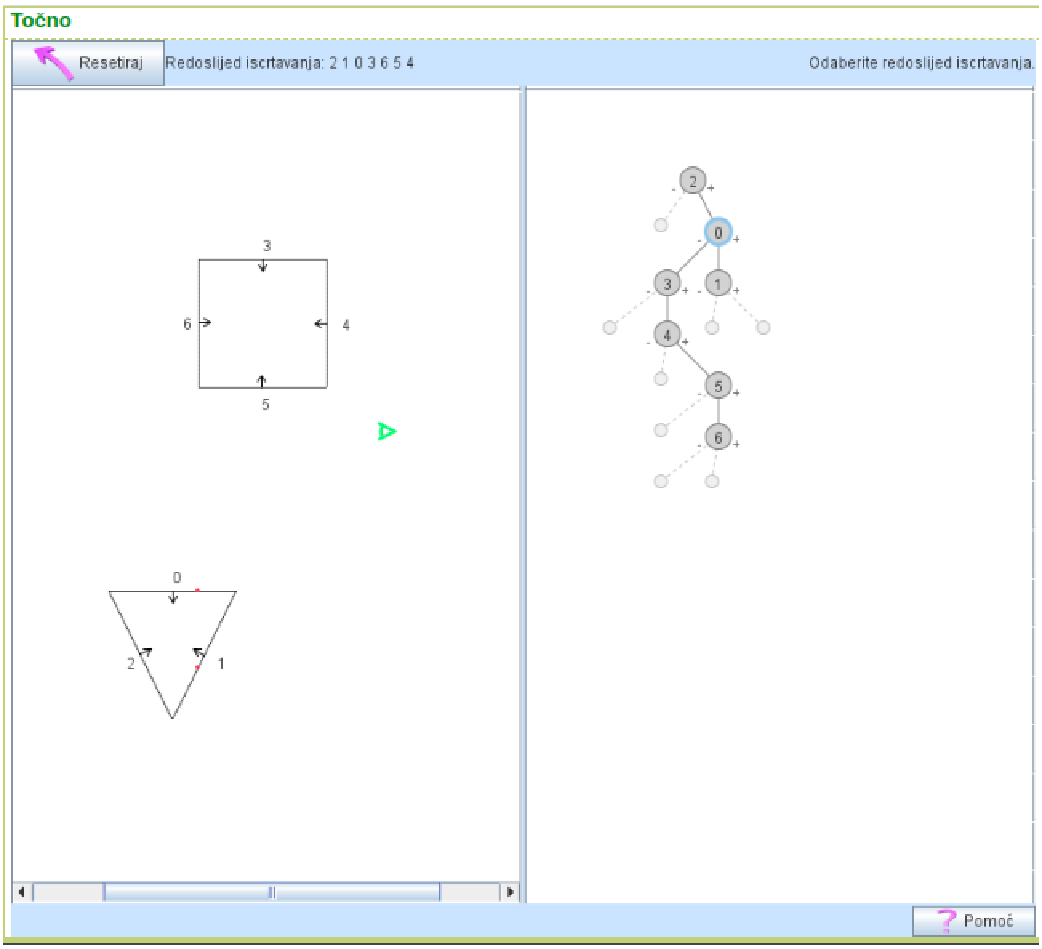
210365

Kako čvor 5 nema negativne strane, vraćamo se nazad i dolazimo do čvora 4 koji se iscrtava

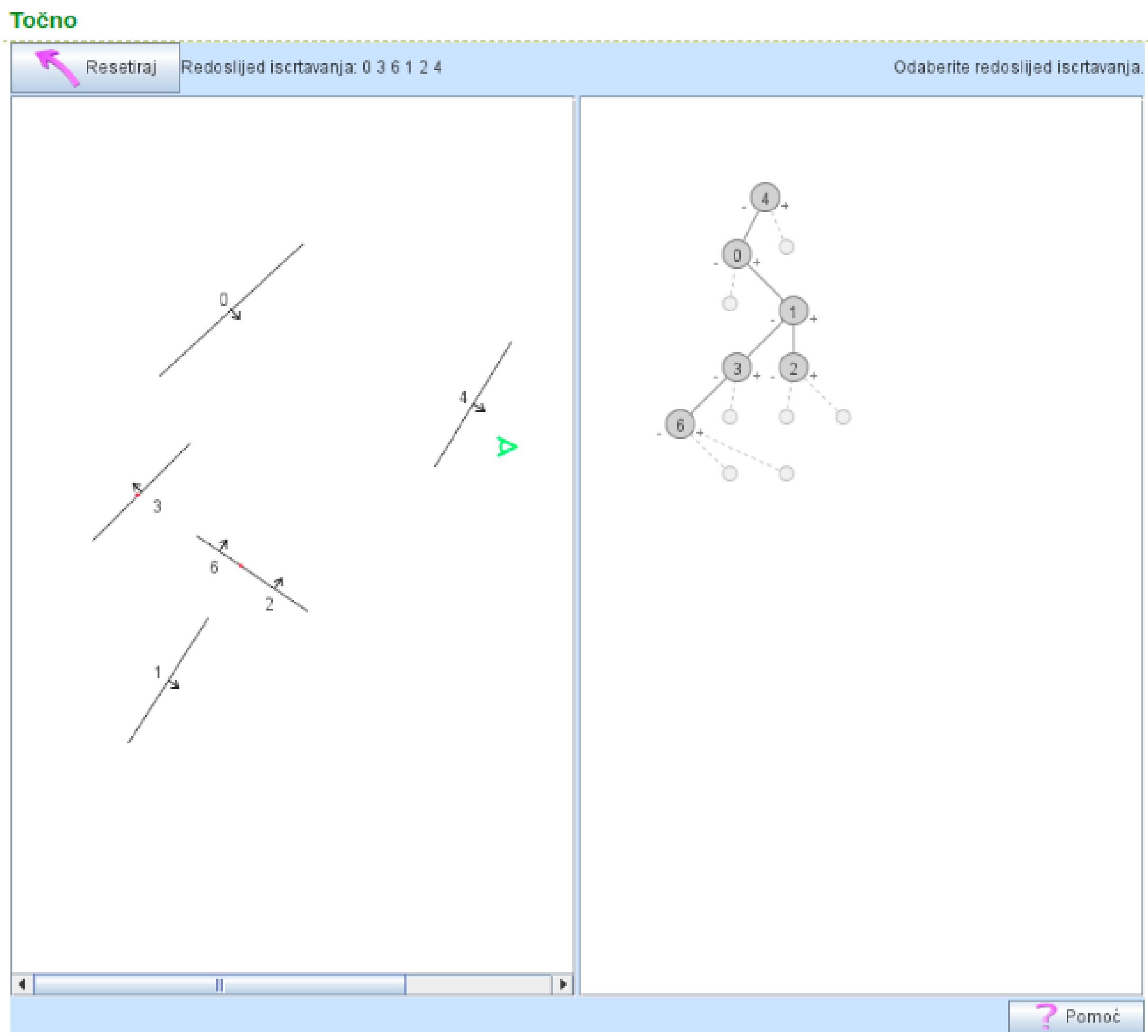
2103654

Kako čvor 4 nema negativne strane, gotovi smo s algoritmom i obišli smo sve čvorove.

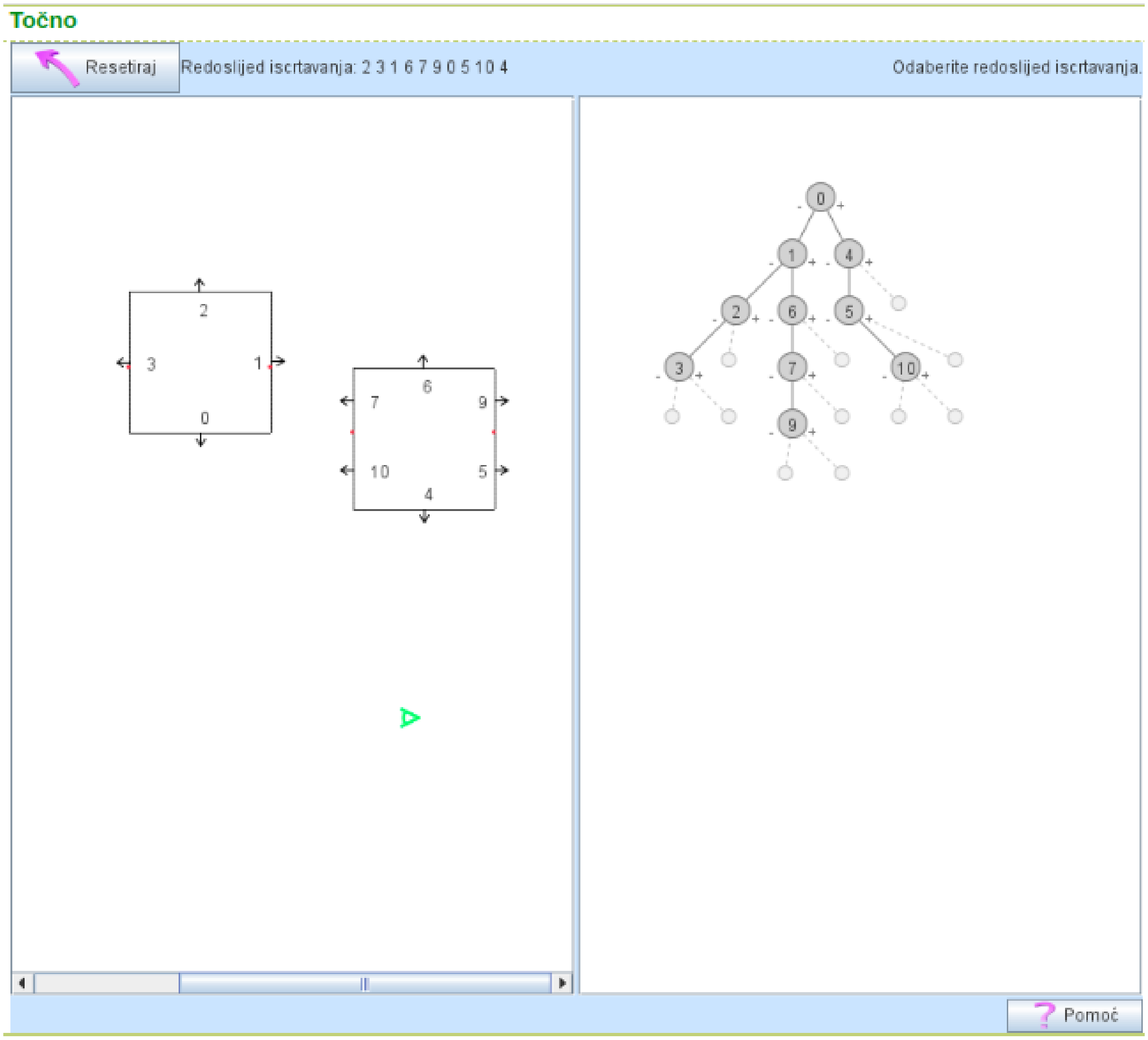
Znači, algoritam je gotov kad su svi čvorovi iscrtani. Dodatno, ne možemo iscrtati čvor dok nije riješena jedna njegova strana u potpunosti. Dodatni primjeri su nakon ove stranice.



Slika 214: Zadatak riješen

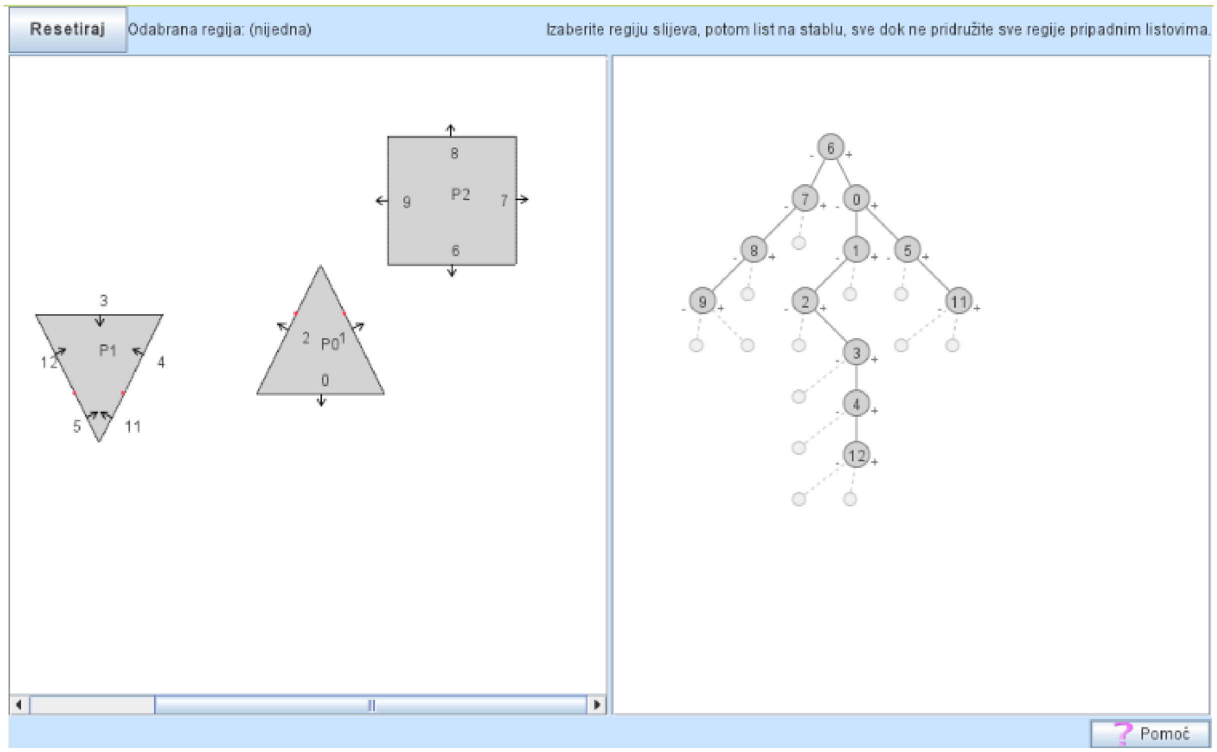


Slika 215: Zadatak 2 riješen



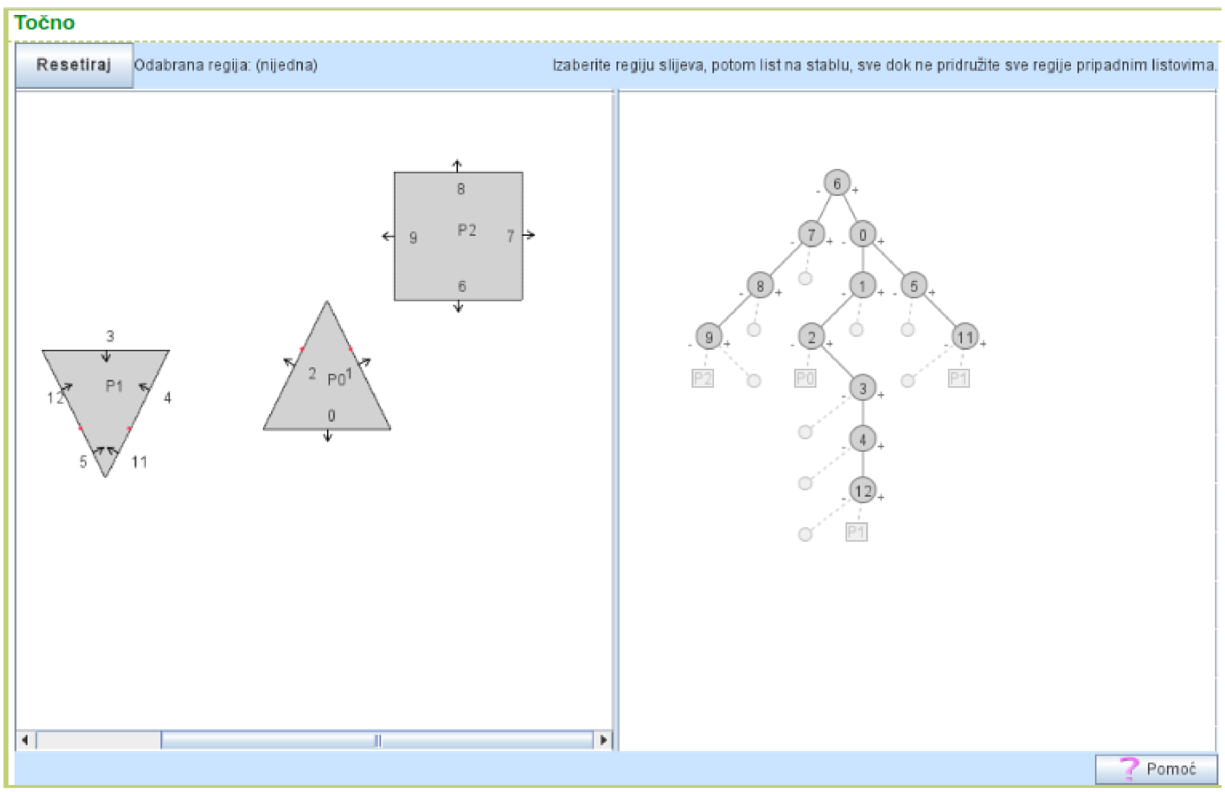
Slika 216: Zadatak 3 riješen

7.12 BSP pridruživanje regija trokuta čvorovima stabla

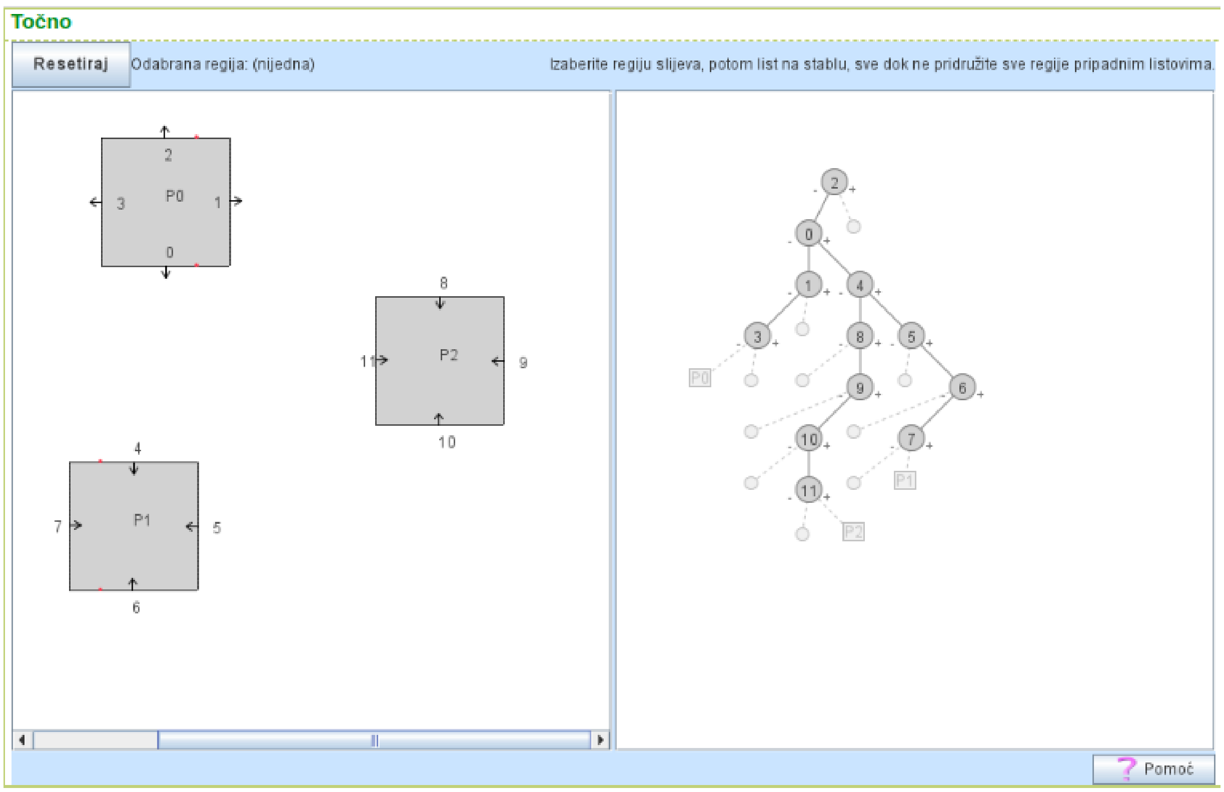


Slika 217: Zadatak

Ovaj zadatak nije kompliciran. Dovoljno je pogledati listove stabla (oni čvorovi koji nemaju niti lijevo niti desno dijete) te odrediti kojem od poligona oni pripadaju. Nakon toga, ako taj brid gleda prema unutrašnjosti poligona, poligon postaviti na + stranu tog lista. Ako brid gleda van poligona, na - stranu tog lista se poligon postavlja.



Slika 218: Zadatak riješen



Slika 219: Zadatak 2 riješen

8 Modeli i postupci osvjetljavanja, sjenčanje, sjene

8.1 Empirijski modeli

8.1.1 Konstantno sjenčanje u točki

Sve o Phongovom modelu osvjetljavanja možete pronaći u knjizi na stranici 237.

Tri su komponente koje osvjetljuju objekt:

- ambijentna - služi tome kako bi osvjetlila nevidljive dijelove, na primjer, ako u mraku pogledate donji dio stola, on neće biti u potpunosti crn, nego će imati neku boju
- difuzna - konkretna svjetlost koja dolazi od izvora na tijelo koje se promatra
- zrcalna - daje sjaj

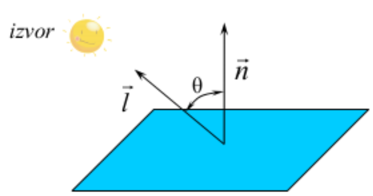
Ambijentna komponenta se računa prema izrazu

$$I_g = k_a \cdot I_a \tag{59}$$

$k_a \in [0, 1]$ i daje koliko će svjetlosti I_a biti apsorbirano, a koliko reflektirano.

Difuzna komponenta se računa

$$I_d = I_i \cdot k_d \cdot cos(\theta) \tag{60}$$



Slika 220: Difuzna komponenta, slika preuzeta iz knjige

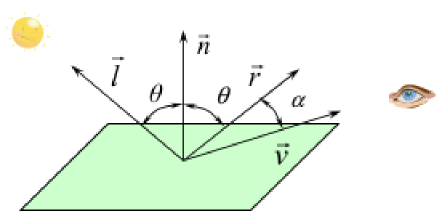
$k_d \in [0,1]$, I_i je intenzitet točkastog izvora, a α je kut između normale površine i vektora od promatrane točke prema izvoru ($\vec{l}$). Ako su $\vec{l}$ i $\vec{n}$ jedinični te ako postoji više izvora svjetlosti, izraz je oblika

$$I_d = k_d \cdot \sum_m I_{i,m} \cdot max(\vec{l} \cdot \vec{n}, 0) \tag{61}$$

Zrcalna komponenta se računa

$$I_s = I_i \cdot k_s \cdot cos^n(\alpha) \tag{62}$$

I_i je intenzitet izvora, $k_s \in [0,1]$, n predstavlja gruboću površine, a α je kut



Slika 221: Zrcalna komponenta, slika preuzeta iz knjige

između reflektirane zrake $\vec{r}$ i vektora od površine do očišta $\vec{v}$.

Ako su $\vec{r}$ i $\vec{v}$ jedinični, izraz prelazi u

$$I_s = k_s \cdot I_i \cdot (\vec{r} \cdot \vec{v})^n \tag{63}$$

Ukupni intenzitet je zbroj sve tri komponente.

Konstantno sjenčanje znači da ćemo cijeli poligon obojati na temelju jedne točke poligona.

Oplošje tijela zadano je nizom poligona. Jedan od poligona zadan je točkama:
[(1.0, -2.0, -3.0) , (4.0, -8.0, 2.0) , (4.0, -5.0, 6.0)],
Očiste se nalazi u točki: **(4.0, -3.0, -10.0)** , a gledište se nalazi u točki: **(-1.0, 2.0, 8.0)** .
Točkasti izvor svjetlosti intenziteta: **151** nalazi se u točki: **(5.0, 5.0, -1.0)** .
Ambijentna komponenta intenziteta jednaka je: **124**.
Vektori prema očistu i gledištu računaju se iz središta poligona.
Koristeći postupak konstantnog sjenčenja izračunajte intenzitet zadanog poligona, tj. njegovu ambijentnu komponentu, difuznu komponentu, zrcalnu komponentu te ukupni intenzitet.
Udaljenost objekta do izvora svjetlosti zanemarite.
Koeficijenti refleksije ambijentne, difuzne te zrcalne komponente su: **ka = 0.78, kd = 0.6, ks = 0.88, n = 4**.

Napomene

- Rješenje je decimalni broj. Koristite decimalnu točku za odvajanje decimalnog od cijelog dijela rješenja (npr. 2.71).
- Poligon je okrenut prema izvoru svjetlosti, odnosno sve tri komponentne intenziteta su pozitivne.
- Rješenje će biti prihvaćeno kao točno ako je apsolutno odstupanje od točnog rješenje manje od **1.0**.

Ambijentna

Difuzna

Zrcalna

Ukupno

Reset

Slika 222: Zadatak

Odmah možemo izračunati ambijentnu komponentu prema izrazu 59

$$I_a = 124 \cdot 0.78 = 96.72$$

Sljedeća stvar koju je potrebno primijetiti da je rečeno kako je poligon okrenut prema izvoru svjetlosti. Sada ćemo provjeriti jesu li točke koje su zadane u zadatku zadane u dobrom redoslijedu. Točnije, hoće li normala gledati prema izvoru svjetlosti ili suprotno od njega. To će samo promijeniti predznake normale, ali to je dobro napraviti kako kasnije ne bi došlo do greške u računu. Podsjetnik kako se provjerava je li točka ispred ili iza ravnine možete pronaći u ovom zadatku 7.3.

To ćemo napraviti na način da ćemo izračunati jednadžbu ravnine u kojoj leži zadani poligon, nakon toga ćemo u jednadžbu ravnine uvrstiti koordinate izvora svjetlosti te ako dobijemo pozitivan broj, poligon je okrenut prema izvoru svjetlosti. Ako dobijemo negativan broj, potrebno je promijeniti predznake normale.

Normalu računamo

$$(V_1 - V_0) \times (V_2 - V_0) = \vec{n}$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} -39 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Što znači da za sad imamo jednadžbu ravnine

$$-39x - 12y + 9z + D = 0$$

D ćemo izračunati tako da uvrstimo npr. točku V_1 u jednadžbu ravnine. Konačna jednadžba ravnine je

$$-39x - 12y + 9z + 42 = 0$$

Kada uvrstimo koordinate izvora svjetlosti, dobijemo -222, što znači da je poligon okrenut leđima izvoru svjetlosti. Sada samo promijenimo predznake normale i normala je oblika

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 39 \\ 12 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Sada kada imamo normalu, kako bismo izračunali difuznu komponentu, potreban nam je vektor $\vec{l}$. Sa slike 220 je vidljivo da je on jednak

$$\vec{l} = I - S$$

Gdje I predstavlja koordinate točke izvora svjetlosti, a S predstavlja središte poligona.

Središte poligona ćemo izračunati na sljedeći način

$$S = (\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}) = (3, -5, 1.67)$$

Odnosno, vektor $\vec{l}$ je

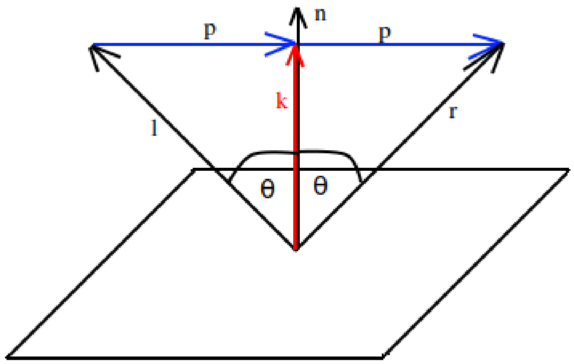
$$\vec{l} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -2.67 \end{bmatrix}$$

Sada kada imamo vektor $\vec{l}$ možemo izračunati difuznu komponentu 60.

$$I_d = I_i \cdot k_d \cdot \frac{\vec{l} \cdot \vec{n}}{|\vec{l}| \cdot |\vec{n}|}$$

Ovaj zadnji dio formule se dobije iz skalarnog umnoška $\vec{l}$ i $\vec{n}$. Kada uvrstimo sve vrijednosti dobije se $I_d = 45.667$

Posljednja komponenta je zrcalna. Za nju nam je potreban reflektirani vektor $\vec{r}$ i vektor od središta poligona do očišta $\vec{v}$. Kako bismo izračunali reflektirani vektor, dobro je imati skicu da se razumije kako se došlo do njega.



Slika 223: Skica za zrcalnu komponentu

Znamo da je kut upadnog vektora i reflektiranog jednak. Nadalje, sa skice možemo primijetiti čemu je jednak vektor $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{l} + 2 \cdot \vec{p}$$

A vektor $\vec{p}$ je jednak

$$\vec{p} = \vec{k} - \vec{l}$$

Odnosno, $\vec{r}$

$$\vec{r} = 2 \cdot \vec{k} - \vec{l}$$

Stoga je prvo potrebno odrediti vektor $\vec{k}$. Vidimo da je $\vec{k}$ projekcija vektora $\vec{l}$ na vektor $\vec{n}$. Podsjetnik 3.2.4. Uz pomoć skalarnog umnoška možemo izračunati $\vec{k}$. Kako je

$$\vec{n} \cdot \vec{l} = |\vec{n}| \cdot |\vec{k}|$$

$$|\vec{k}| = \frac{\vec{n} \cdot \vec{l}}{|\vec{n}|}$$

Ako ne razumijete otkud ovo, posjetite podsjetnik.

Pošto $\vec{k}$ leži na vektoru $\vec{n}$, kako bismo izračunali njegovu vektorski vrijednost dovoljno je pomnožiti njegovu duljinu s jediničnim vektorom $\vec{n}$

$$\vec{k} = |\vec{k}| \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\vec{k} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{l}}{|\vec{n}|} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Ovdje je bitno razlikovati ovaj prvi puta i drugi puta, $\vec{k}$ se tumači kao skalarni umnožak $\vec{n}$ i $\vec{l}$ normiran po $|\vec{n}|$ se množi sa jediničnim vektorom $\vec{n}$. Na ovaj način se dobije vektor, a ne skalar. Kad se uvrste vrijednosti dobije se

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 4.959 \\ 1.5259 \\ -1.145 \end{bmatrix}$$

Sada možemo izračunati i vektor $\vec{r}$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 7.918 \\ -6.948 \\ 0.38 \end{bmatrix}$$

Nadalje, potreban nam je još vektor $\vec{v}$, sa slike 221 se vidi da je on jednak

$$\vec{v} = O - S$$

gdje je O očište, a S središte poligona

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -11.67 \end{bmatrix}$$

Sad kada sve uvrstimo u 62

$$I_s = k_s \cdot I_i \cdot (\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|})^n$$

Dobije se

$$I_s = 0.006347$$

Ukupni intenzitet je zbroj sve tri komponente

$$I = I_a + I_d + I_s = 142.39$$

Točno Relativni doprinc

Oplošje tijela zadano je nizom poligona. Jedan od poligona zadan je točkama:
[(1.0, -2.0, -3.0) , (4.0, -8.0, 2.0) , (4.0, -5.0, 6.0)],
Očiste se nalazi u točki: **(4.0, -3.0, -10.0)** , a gledište se nalazi u točki: **(-1.0, 2.0, 8.0)** .
Točkasti izvor svjetlosti intenziteta: **151** nalazi se u točki: **(5.0, 5.0, -1.0)** .
Ambijentna komponenta intenziteta jednaka je: **124**.
Vektori prema očistu i gledištu računaju se iz središta poligona.
Koristeći postupak konstantnog sjenčenja izračunajte intenzitet zadanog poligona, tj. njegovu ambijentnu komponentu, difuznu komponentu, zrcalnu komponentu te ukupni intenzitet.
Udaljenost objekta do izvora svjetlosti zanemarite.
Koeficijenti refleksije ambijentne, difuzne te zrcalne komponente su: **ka = 0.78, kd = 0.6, ks = 0.88, n = 4**.

Napomene

- Rješenje je decimalni broj. Koristite decimalnu točku za odvajanje decimalnog od cijelog dijela rješenja (npr. 2.71).
- Poligon je okrenut prema izvoru svjetlosti, odnosno sve tri komponentne intenziteta su pozitivne.
- Rješenje će biti prihvaćeno kao točno ako je apsolutno odstupanje od točnog rješenje manje od **1.0**.

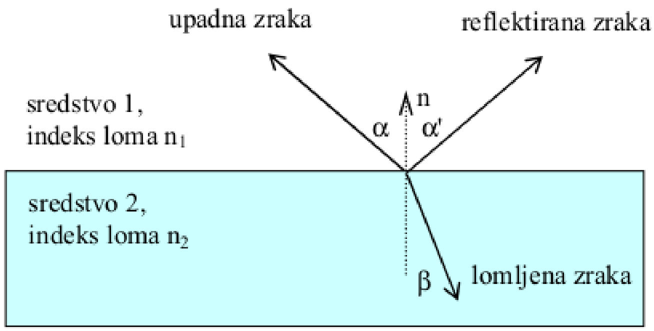
Ambijentna	96.72
Difuzna	45.667
Zrcalna	0.006347
Ukupno	142.393347

Slika 224: Zadatak riješen

8.2 Prelazni modeli

8.2.1 Reflektirana i lomljena zraka - 2D slučaj

Detaljnije možete pronaći u knjizi na stranici 235. Zakon refleksije kaže da



Slika 225: Prikaz refleksije i loma svjetlosti, slika preuzeta iz knjige

je upadni kut svjetlosti jednak reflektiranom kutu

Zakon loma svjetlosti (Snellov zakon) se odnosi na kut između normale i lomljene zrake β obzirom na upadni kut α. Vrijedi

$$\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \tag{64}$$

gdje su n_1 i n_2 indeksi loma svjetlosti, a v_1 i v_2 brzine širenja vala kroz sredstvo. n je definiran kao

$$n = \frac{c}{v}$$

Zadani su normirani vektor normale na površinu **n = [0.0 0.0 1.0]**, te normirani vektor prema izvoru svjetlosti **l = [0.0 0.85 0.53]**.
Zadani su i indeks loma sredstva u kojem je izvor svjetlosti **n1 = 1.66** i indeks loma sredstva u kojem se zraka lomi **n2 = 1.89**.
Potrebno je odrediti normirani vektor usmjeren u pravcu reflektirane zrake **r** i normirani vektor usmjeren u pravcu lomljene zrake **t**.

r.x

r.y

r.z

t.x

t.y

t.z

Reset

Napomene:
1. izračunati vektori r i t moraju biti normirani (jedinični).
2. komponenta vektora će se priznati kao točna ako ima grešku manju od 0.05

Slika 226: Zadatak

Objašnjenje kako dobiti reflektiranu zraku možete pronaći u prethodnom poglavlju 8.1.1 te skica 223. Kako su u zadatku svi vektori normirani, ne moramo se mučiti s normiranjem.

$$\vec{r} = 2 \cdot \vec{k} - \vec{l}$$

$$\vec{k} = \vec{n} \cdot (\vec{l} \cdot \vec{n})$$

Ovdje se primijeti razlika između prvog puta i drugog puta. $\vec{k}$ možemo tumačiti kao normirani prvi vektor puta skalarni umnožak $\vec{l}$ i $\vec{n}$. Za rješenje se dobije

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.53 \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.85 \\ 0.53 \end{bmatrix}$$

Za lomljeni vektor se malo drugačije radi. Snellov zakon možemo zapisati i kao

$$n_1 \cdot sin(\alpha) = n_2 \cdot sin(\beta)$$

Nadalje, sinuse možemo raspisati preko formule za duljinu vektorskog umnoška

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin(\alpha) \tag{65}$$

Kako su u zadatku jedinični vektori

$$sin(\alpha) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

pa izraz za Snellov zakon prelazi u (po pravilu desne ruke)

$$n_1 \cdot (\vec{n} \times \vec{l}) = n_2 \cdot (\vec{t} \times \vec{n})$$

gdje je $\vec{t}$ oznaka za vektor lomljene zrake.

$$1.66 \cdot (-0.85\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}) = 1.89 \cdot (y_t\vec{i} - x_t\vec{j} + 0z_t\vec{k})$$

Kako izračunati vektorski umnožak dva vektora možete pronaći na
https://www.youtube.com/watch?v=fovkY_PN5pY&t=82s
Sada izjednačimo koordinate uz jedinične vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ te dobijemo

$$y = \frac{1.66 \cdot (-0.85)}{1.89} = -0.747$$

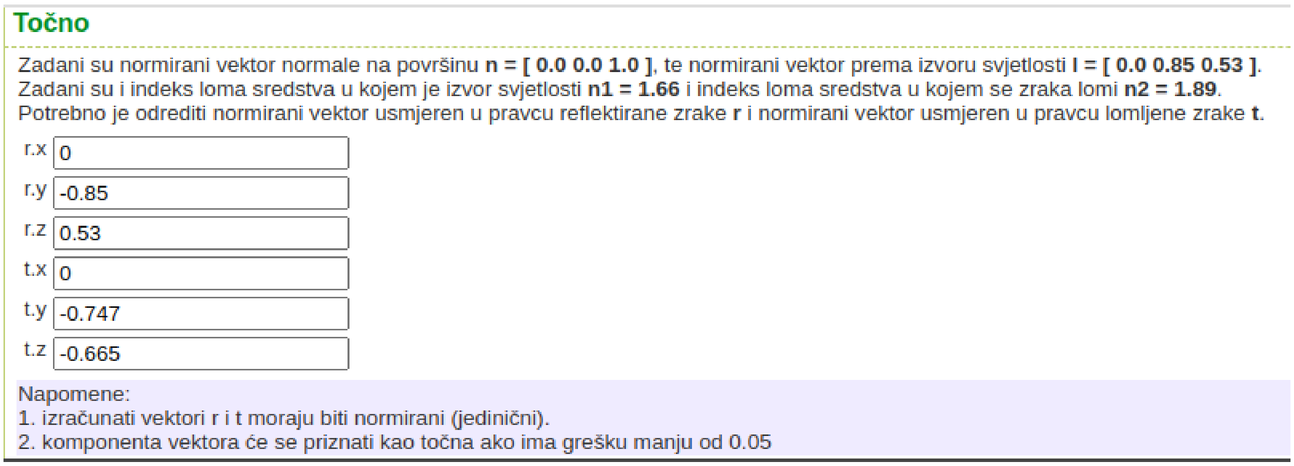
$$x = 0$$

te z ne možemo izračunati. Ali kako znamo da $\vec{t}$ mora biti jedinični, možemo iskoristiti tu jednadžbu

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

$$z = \sqrt{(1 - 0.747^2)} = \pm 0.665$$

Ali kako znamo da je $\vec{t}$ suprotne orijentacije od vektora $\vec{l}$ odaberemo minus predznak


Točno

Zadani su normirani vektor normale na površinu **n = [0.0 0.0 1.0]**, te normirani vektor prema izvoru svjetlosti **l = [0.0 0.85 0.53]**.
Zadani su i indeks loma sredstva u kojem je izvor svjetlosti **n1 = 1.66** i indeks loma sredstva u kojem se zraka lomi **n2 = 1.89**.
Potrebno je odrediti normirani vektor usmjeren u pravcu reflektirane zrake **r** i normirani vektor usmjeren u pravcu lomljene zrake **t**.

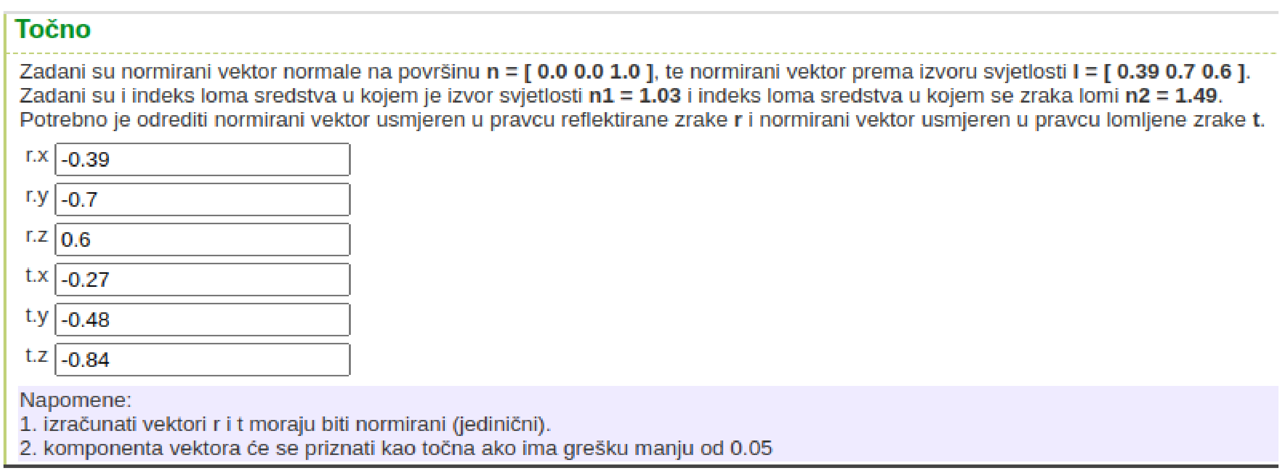
r.x	0
r.y	-0.85
r.z	0.53
t.x	0
t.y	-0.747
t.z	-0.665

Napomene:
1. izračunati vektori r i t moraju biti normirani (jedinični).
2. komponenta vektora će se priznati kao točna ako ima grešku manju od 0.05

Slika 227: Zadatak riješen

8.2.2 Reflektirana i lomljena zraka - 3D slučaj, nešto jednostavniji

Zadatak se rješava isto kao prethodni 8.2.1, samo što u ovom slučaju x nije 0.


Točno

Zadani su normirani vektor normale na površinu **n = [0.0 0.0 1.0]**, te normirani vektor prema izvoru svjetlosti **l = [0.39 0.7 0.6]**.
Zadani su i indeks loma sredstva u kojem je izvor svjetlosti **n1 = 1.03** i indeks loma sredstva u kojem se zraka lomi **n2 = 1.49**.
Potrebno je odrediti normirani vektor usmjeren u pravcu reflektirane zrake **r** i normirani vektor usmjeren u pravcu lomljene zrake **t**.

r.x	-0.39
r.y	-0.7
r.z	0.6
t.x	-0.27
t.y	-0.48
t.z	-0.84

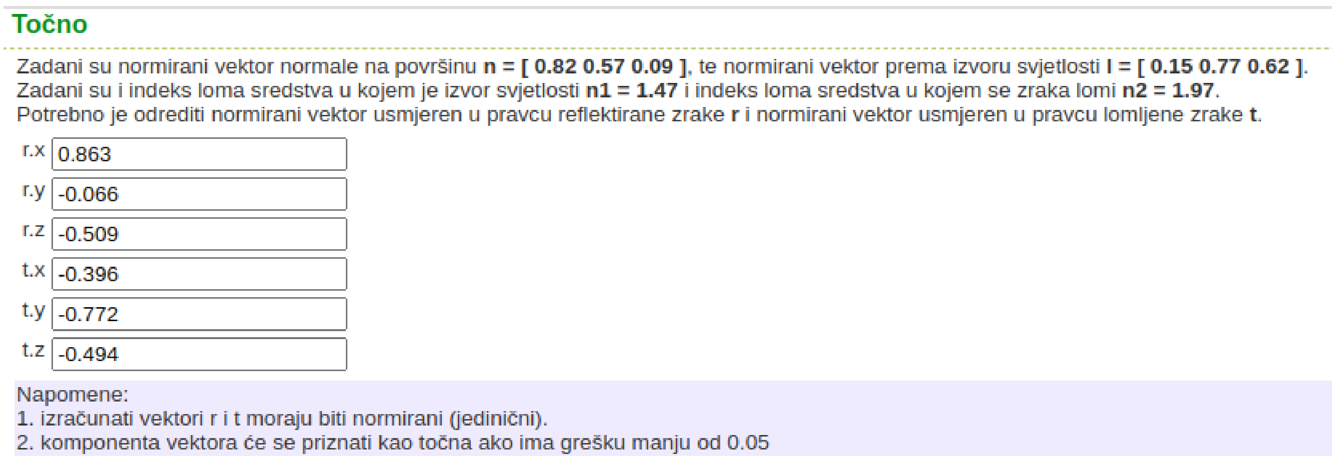
Napomene:
1. izračunati vektori r i t moraju biti normirani (jedinični).
2. komponenta vektora će se priznati kao točna ako ima grešku manju od 0.05

Slika 228: Zadatak riješen

8.2.3 Reflektirana i lomljena zraka - 3D slučaj, složeniji

Zadatak se rješava isto kao i 8.2.1 uz nekoliko razlika. $\vec{r}$ se računa isto. Nakon toga se dobiju 3 jednadžbe prilikom računanja $\vec{t}$.

Konkretno



Točno

Zadani su normirani vektor normale na površinu **n = [0.82 0.57 0.09]**, te normirani vektor prema izvoru svjetlosti **l = [0.15 0.77 0.62]**.
Zadani su i indeks loma sredstva u kojem je izvor svjetlosti **n1 = 1.47** i indeks loma sredstva u kojem se zraka lomi **n2 = 1.97**.
Potrebno je odrediti normirani vektor usmjeren u pravcu reflektirane zrake **r** i normirani vektor usmjeren u pravcu lomljene zrake **t**.

r.x	0.863
r.y	-0.066
r.z	-0.509
t.x	-0.396
t.y	-0.772
t.z	-0.494

Napomene:
1. izračunati vektori r i t moraju biti normirani (jedinični).
2. komponenta vektora će se priznati kao točna ako ima grešku manju od 0.05

Slika 229: Zadatak riješen

$$0.1773y - 1.229z = 0.417627$$

$$-0.1773x + 1.6154z = -0.727503$$

$$1.1229x - 1.6154y = 0.802473$$

Ali kad te jednadžbe pokušamo riješiti ne dobijemo rješenje. Umjesto te tri, odabrat ćemo dvije, a treća će biti izračunata na sljedeći način. Znamo da je β kut između -$\vec{n}$ i $\vec{t}$. Stoga treću jednadžbu možemo iskoristiti skalarni umnožak između -$\vec{n}$ i $\vec{t}$

$$-\vec{n} \cdot \vec{t} = cos(\beta)$$

Ne treba pisati duljina od $\vec{n}$ i $\vec{t}$ jer su jedinični. β možemo izračunati iz Snellovog zakona.

$$sin(\beta) = \frac{n_1}{n_2} \cdot sin(\alpha)$$

α možemo izračunati isto preko skalarnog umnoška, ali $\vec{n}$ i $\vec{l}$. Za α se dobije

$$\alpha = 51.85$$

Automatski slijedi β

$$\beta = 35.93$$

Sada kada imamo β, možemo raspisati jednadžbu $-\vec{n} \cdot \vec{t}$

$$-0.82x - 0.57y - 0.09z = cos(\beta) = 0.8097$$

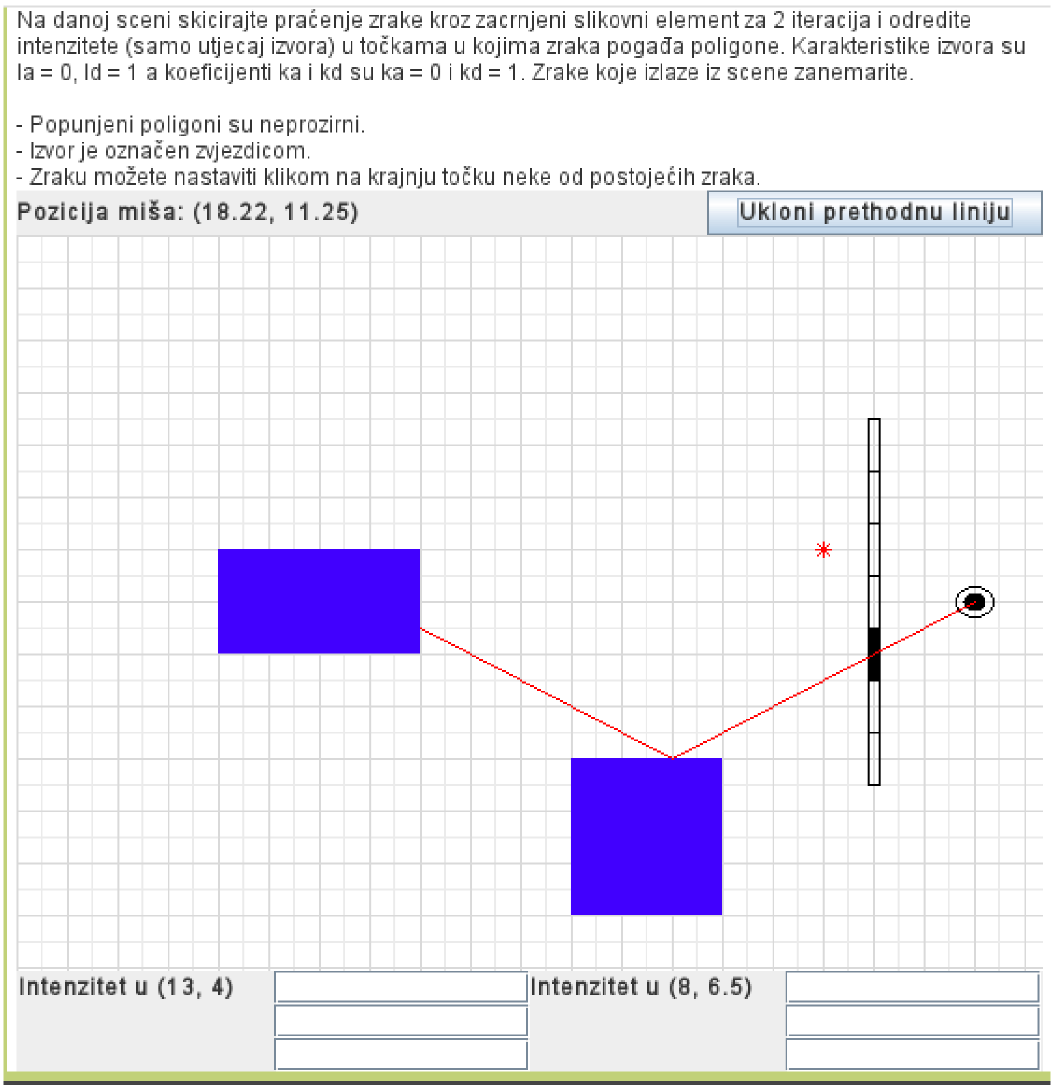
i to je treća jednadžba. Uzmemo bilo koje dvije od tri te ovu treću i dobijemo rješenja.

8.2.4 Postupak praćenja zrake

Slika 230: Zadatak

Potrebno je skicirati nastavak zrake koja se odbija od nacrtana dva tijela.

Kako je $k_a = 0$ i $I_a = 0$ to znači da ambijentnu komponentu možemo



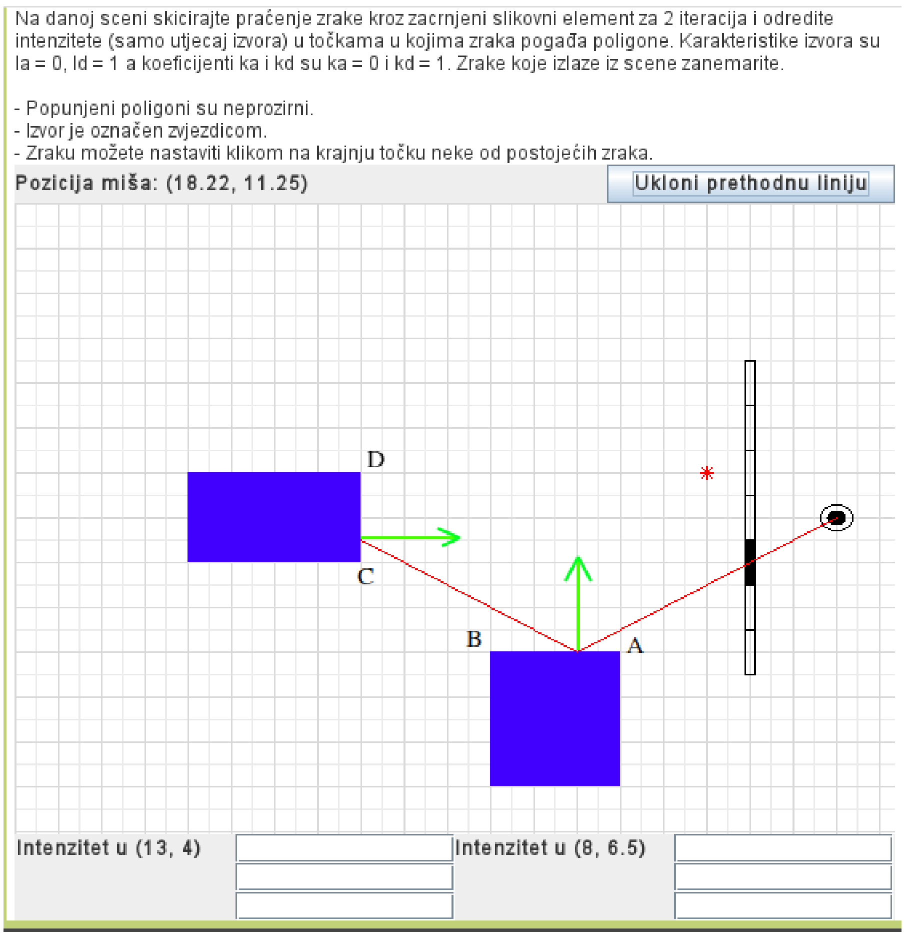
Slika 231: Reflektirana zraka

zanemariti. Nadalje, kako je $k_d = 1$ i $I_d = I_i = 1$ po formuli 60, potrebno je samo izračunati $cos(\theta)$, odnosno

$$I = cos(\theta) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{l}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{l}|}$$

i to je jedino što utječe na intenzitet u točki.

Prilikom odabira normale treba biti oprezan. Točnije, normala mora gledati van tijela Kako bi se prisjetili izračuna normale, posjetiti 3.1.4.



Slika 232: Skicirani vrhovi i normale

Za točku (13, 4) normala treba gledati van tijela, pa se krećemo od točke B prema točki A. Kako bismo izračunali vrijednost normale, prebacimo se u homogeni prostor

$$\vec{n_1} = B \times A = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Sada samo odbacimo -12 i normala je oblika

$$\vec{n_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nakon toga potrebno je izračunati vektor $\vec{l}$ od točke (13, 4) do točke izvora svjetlosti $I(16, 8)$

$$\vec{l_1} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Sada kada imamo $\vec{n_1}$ i $\vec{l_1}$ možemo izračunati intenzitet u točki (13, 4)

$$I = 0.8$$

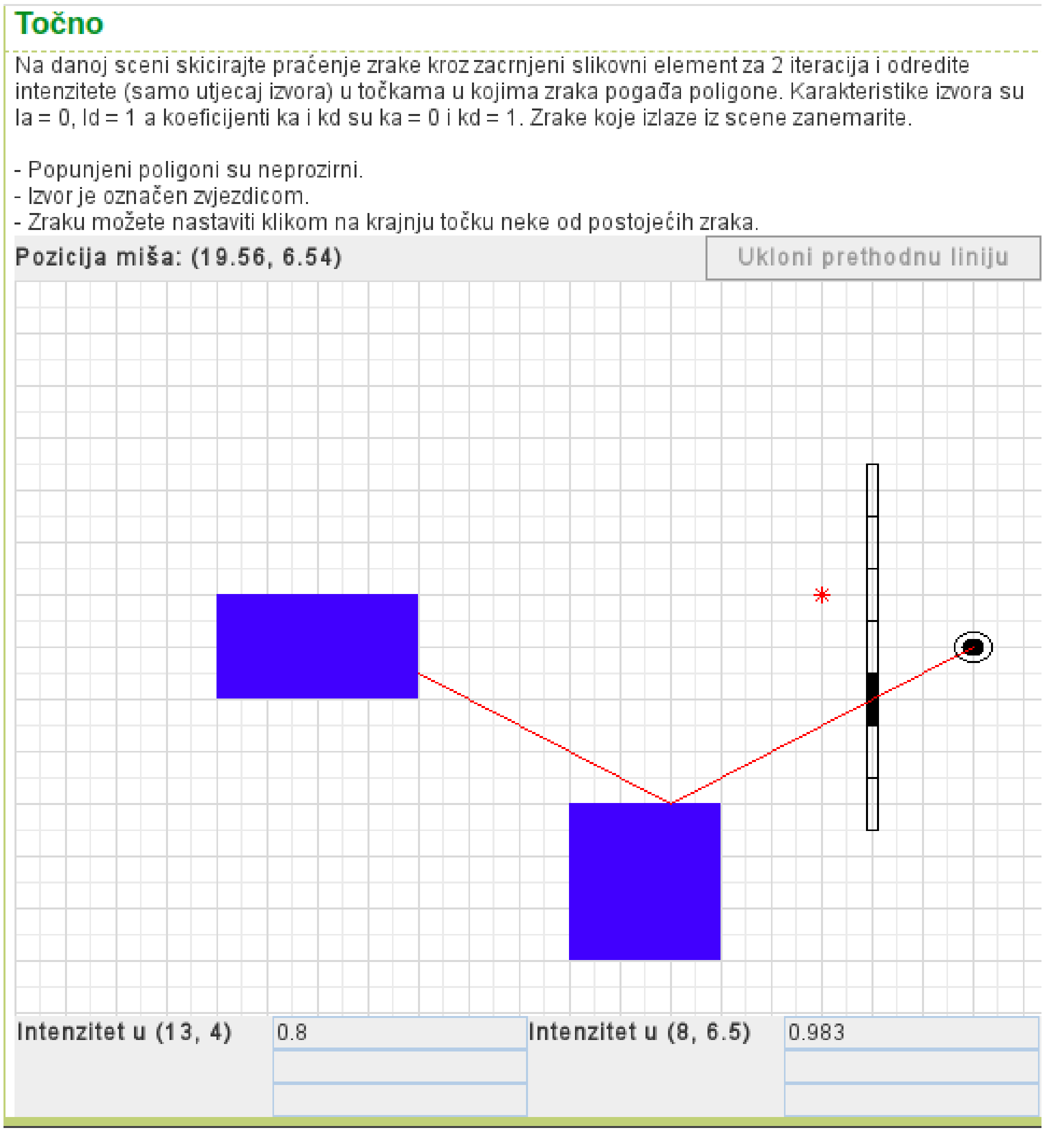
Isto napravimo i za drugu točku (8, 6.5)

$$\vec{n_2} = D \times C = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

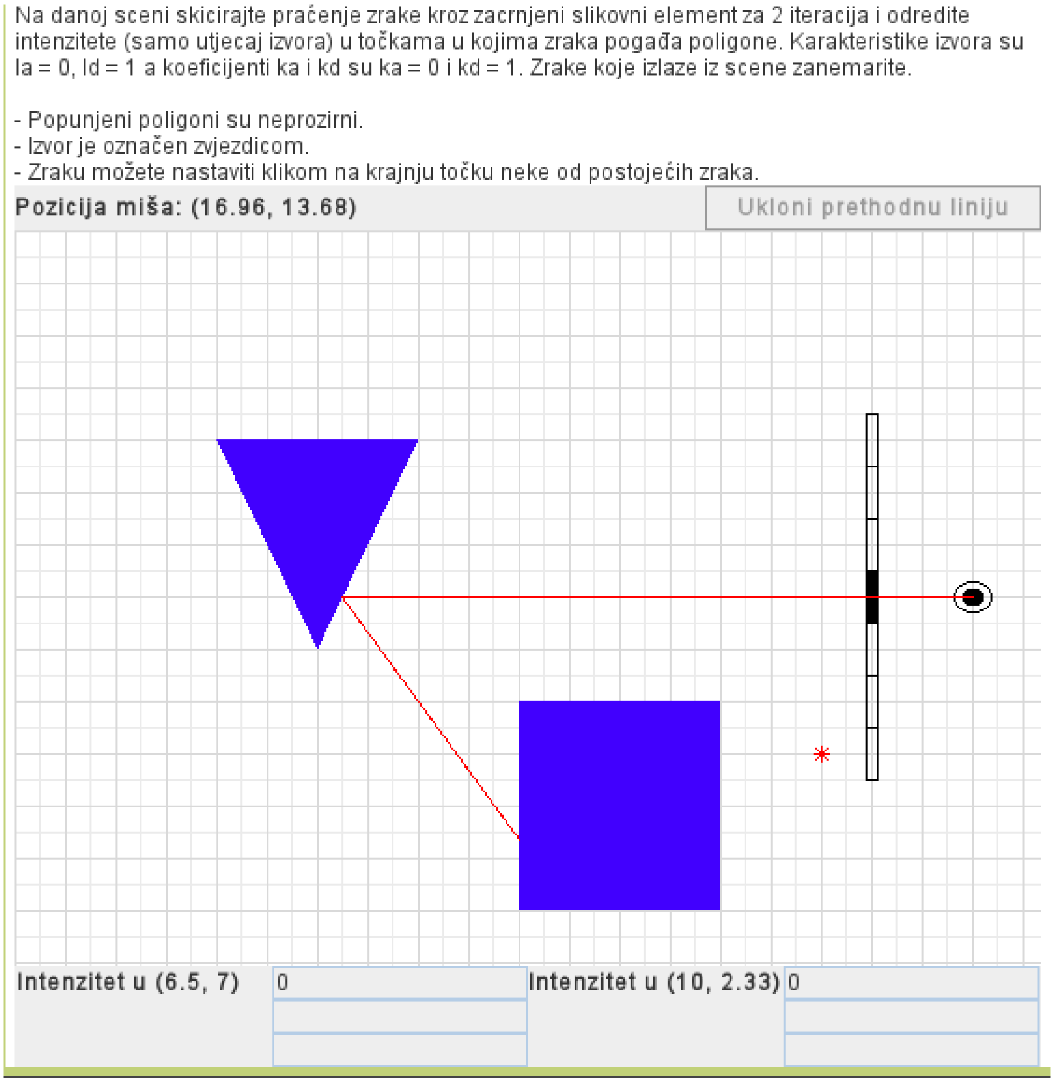
i $\vec{l}$

$$\vec{l_2} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$I = 0.983$$



Slika 233: Zadatak riješen



Slika 234: Zadatak 2 riješen

Ako se točka za koju računamo intenzitet ne vidi iz izvora, automatski možemo pisati da je intenzitet u toj točki 0. Izračun bi dao negativan broj.

9 Boja u računalnoj grafici

9.1 Ljudsko oko i percepcija intenziteta

Detaljnije možete pronaći u knjizi na stranici 264 i nadalje. Ljudsko oko se može interpretirati nelinearnom raspodjelom intenziteta. To se može prikazati na sljedeći način

$$I_1 = I_0 \cdot r$$

$$I_2 = I_0 \cdot r^2$$

$$I_n = I_0 \cdot r_n$$

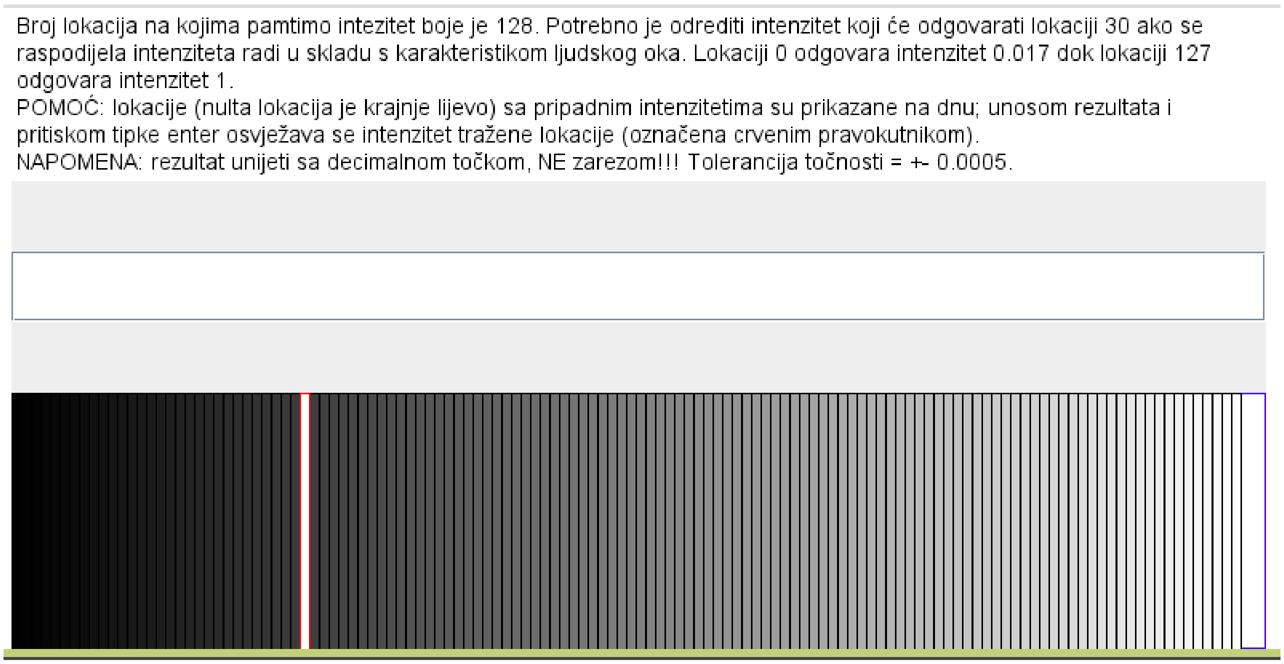
Kako znamo da je $I_n = 1$,

$$r = (\frac{1}{I_0})^{\frac{1}{n}} \tag{66}$$

gdje r predstavlja konstantan omjer susjednih intenziteta, a I_0 je početni intenzitet.
U općem slučaju vrijedi

$$I_j = r^j \cdot I_0 = ((\frac{1}{I_0})^{\frac{1}{n}})^j \cdot I_0 = I_0^{1-\frac{j}{n}} \tag{67}$$

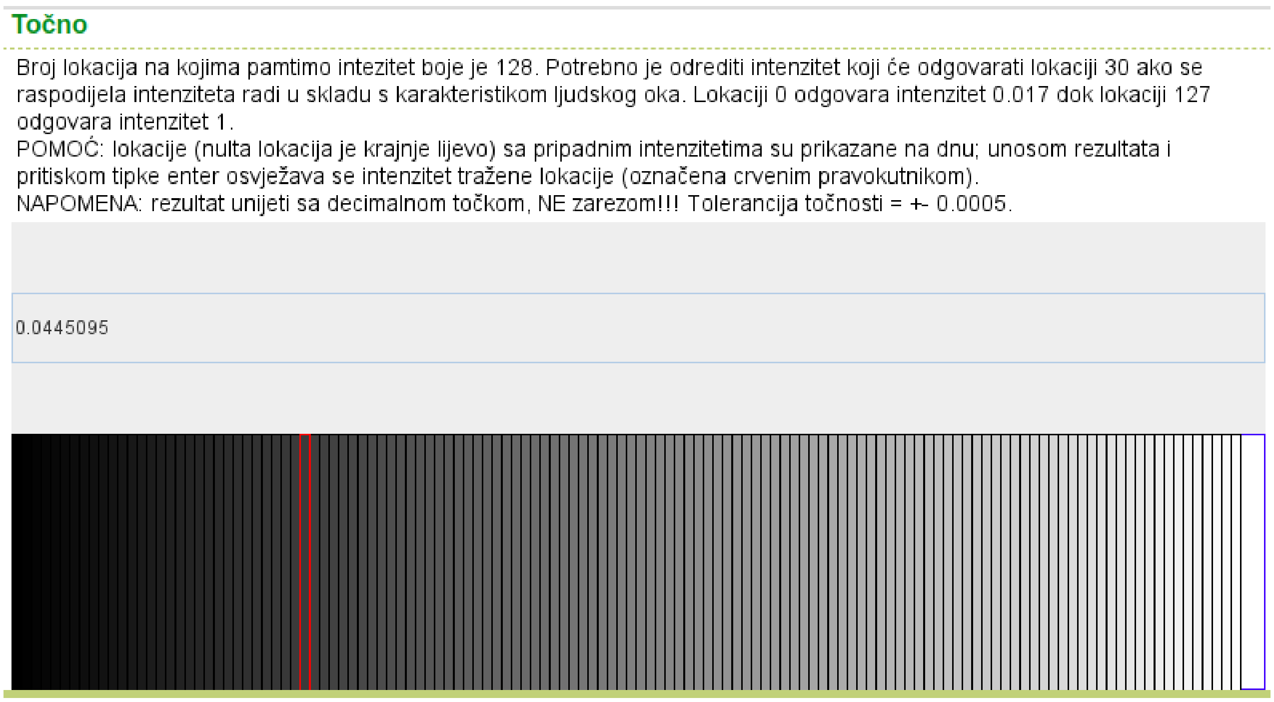
gdje je n broj memorijskih lokacija.



Slika 235: Zadatak

Dovoljno je uvrstiti u formulu 67.

$$I_{30} = 0.017^{1-\frac{30}{127}}$$



Slika 236: Zadatak riješen

10 Fraktali

10.1 Ispitivanje točke Mandelbrotovog skupa

Malo duži video koji objašnjava Mandelbrotov skup
https://www.youtube.com/watch?v=FFftmWSzgmk
U knjizi na stranici 288 također možete pronaći informacija o Mandelbrotovom skupu.

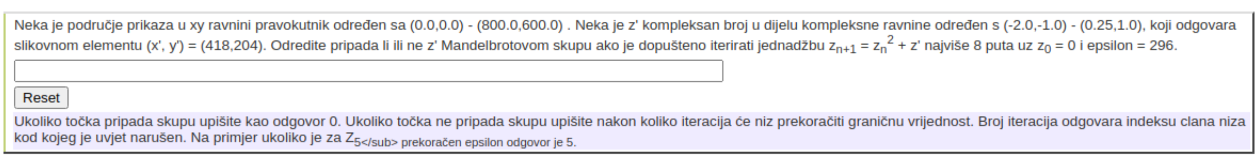
$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0 \tag{68}$$

Ukratko, kompleksni broj c pripada Mandelbrotovom skupu ako kako n teži u ∞ modul novonastalog kompleksnog broja se nalazi unutar kružnice radijusa ϵ
Intuitivnije je za shvatiti da kompleksni broj c ne pripada Mandelbrotovom skupu ako kako n teži u ∞ modul kompleksnog broja z beskonačno raste.
Modul kompleksnog broja je

$$z = x + yi \quad kompleksni \quad broj \quad z$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad modul \quad kompleksnog \quad broja \quad z$$

Kako bismo na računalu prikazali izgled Mandelbrotovog skupa moramo


Neka je područje prikaza u xy ravnini pravokutnik određen sa (0.0,0.0) - (800.0,600.0) . Neka je z' kompleksan broj u dijelu kompleksne ravnine određen s (-2.0,-1.0) - (0.25,1.0), koji odgovara slikovnom elementu (x', y') = (418,204). Odredite pripada li ili ne z' Mandelbrotovom skupu ako je dopušteno iterirati jednadžbu $z_{n+1} = z_n^2$ + z' najviše 8 puta uz z_0 = 0 i epsilon = 296.

Reset

Ukoliko točka pripada skupu upišite kao odgovor 0. Ukoliko točka ne pripada skupu upišite nakon koliko iteracija će niz prekoračiti graničnu vrijednost. Broj iteracija odgovara indeksu clana niza kod kojeg je uvjet narušen. Na primjer ukoliko je za Z_5</sub> prekoračen epsilon odgovor je 5.

Slika 237: Zadatak

beskonačnu ravninu diskretizirati.
To se radi na sljedeći način

$$\frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} = \frac{u - u_{min}}{u_{max} - u_{min}} \tag{69}$$

$$\frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}} = \frac{v - v_{min}}{v_{max} - v_{min}} \tag{70}$$

gdje su x i y koordinate ekranske točke, a u i v koordinate kompleksne točke.
Konkretan algoritam koji se koristi u zadatku je

```
int divergence_test(complex c, int limit, int epsilon){
        complex z;
        z.re = 0; z.im = 0;
        for(int i=0; i<=limit;i++){
                double next_re = z.re*z.re - z.im*z.im + c.re;
                double next_im = 2*z.re*z.im + c.im;
                z.re = next_re;
                z.im = next.im;
                double modul2 = z.re*z.re + z.im*z.im
                if(modul2 > epsilon) return i;
        }
        return 0;
}
```

gdje se sljedeći imaginarni računa prema izrazu 68. Naravno, ne postoji tip podatka *complex* u C-u pa treba samo napraviti strukturu.
Sada kad imamo sve podatke, možemo provesti algoritam i provjeriti pripadnost točke z'.

$$x_{min} = 0 \qquad y_{min} = 0$$
$$x_{max} = 800 \qquad y_{max} = 600$$
$$u_{min} = -2 \qquad v_{min} = -1$$
$$u_{max} = 0.25 \qquad v_{max} = 1$$
$$x = 418 \qquad y = 204$$

Iz navedenih podataka dobijemo z', tj. trebaju nam u i v iz jednadžbi 69 i 70. Kad se izračunaju u i v dobije se

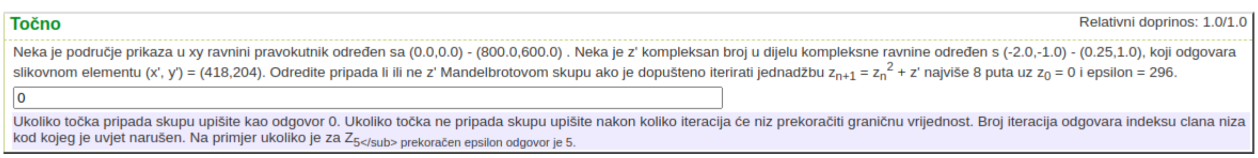
$$z' = u + vi$$
$$z' = -0.824375 - 0.32i$$

Sad kad imamo z', uvrstimo ga u algoritam i provodimo algoritam $divergence_test$ $limit = 8$ puta

$$z_0 = 0$$
$$|z_0| = 0$$
$$z_1 = z_0^2 + z' = -0.824375 - 0.32i$$

$$|z_1| = 0.88$$
$$z_2 = z_1^2 + z' = -0.247 + 0.2076i$$
$$|z_2| = 0.323$$
$$z_3 = z_2^2 + z' = -0.806 - 0.423i$$
$$|z_3| = 0.91$$
$$z_4 = z_3^2 + z' = -0.353 + 0.362i$$
$$|z_4| = 0.51$$
$$z_5 = z_4^2 + z' = -0.831 - 0.575i$$
$$|z_5| = 1.01$$
$$z_6 = z_5^2 + z' = -0.465 + 0.635i$$
$$|z_6| = 0.79$$
$$z_7 = z_6^2 + z' = -1.012 - 0.911i$$
$$|z_7| = 1.36$$
$$z_8 = z_7^2 + z' = -0.631 + 1.524i$$
$$|z_8| = 1.65$$

Kako ni u jednom od 8 koraka nismo dobili modul kompleksnog broja veći od $epsilon = 296$, zaključujemo kako točka pripada skupu i za rješenje upisujemo 0.



Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

Neka je područje prikaza u xy ravnini pravokutnik određen sa (0.0,0.0) - (800.0,600.0) . Neka je z' kompleksan broj u dijelu kompleksne ravnine određen s (-2.0,-1.0) - (0.25,1.0), koji odgovara slikovnom elementu (x', y') = (418,204). Odredite pripada li ili ne z' Mandelbrotovom skupu ako je dopušteno iterirati jednadžbu $z_{n+1} = z_n^2 + z'$ najviše 8 puta uz $z_0 = 0$ i epsilon = 296.

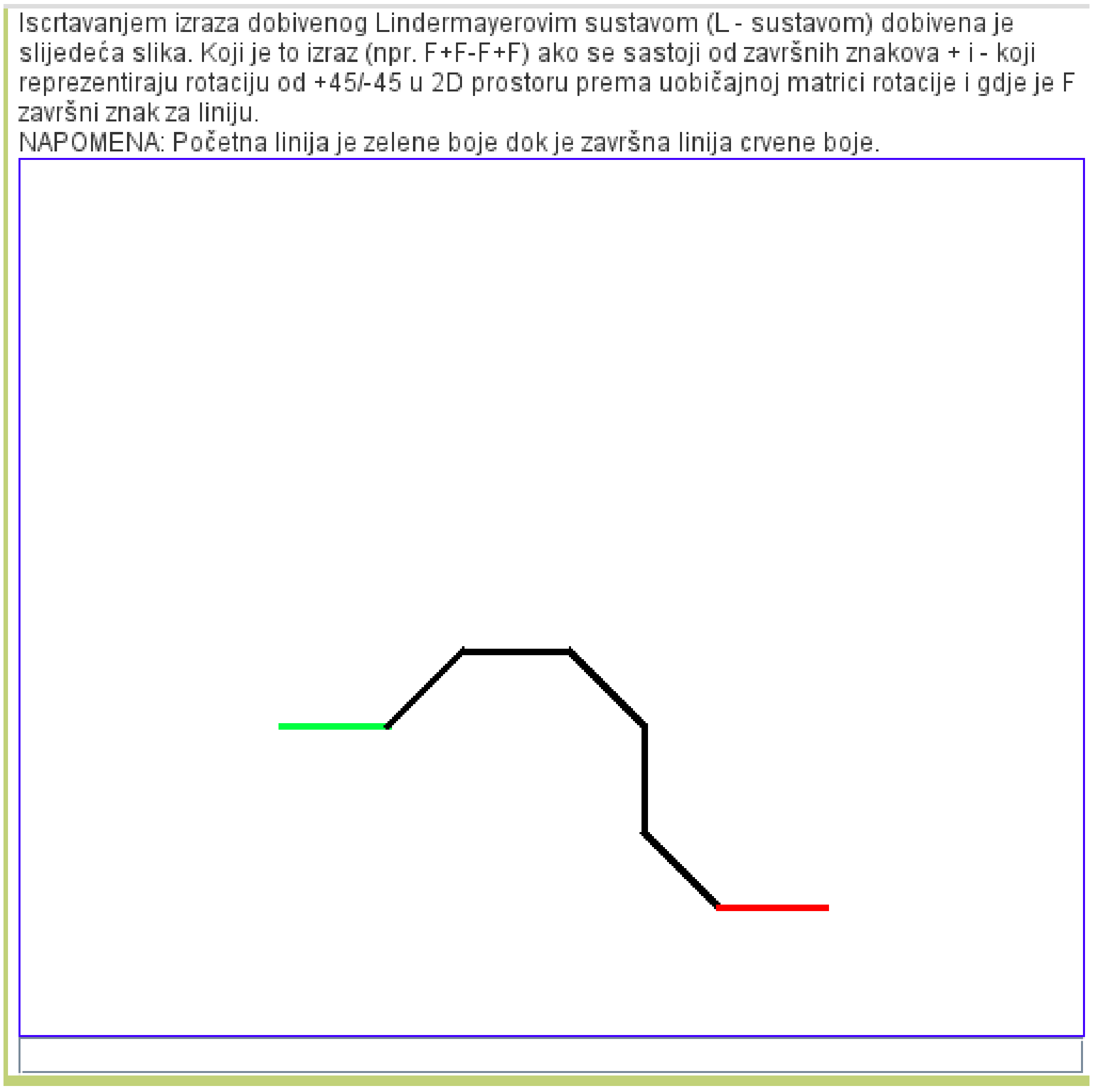
0

Ukoliko točka pripada skupu upišite kao odgovor 0. Ukoliko točka ne pripada skupu upišite nakon koliko iteracija će niz prekoračiti graničnu vrijednost. Broj iteracija odgovara indeksu clana niza kod kojeg je uvjet narušen. Na primjer ukoliko je za Z5</sub> prekoračen epsilon odgovor je 5.

Slika 238: Zadatak riješen

10.2 Generiranje fraktala L-sustavom

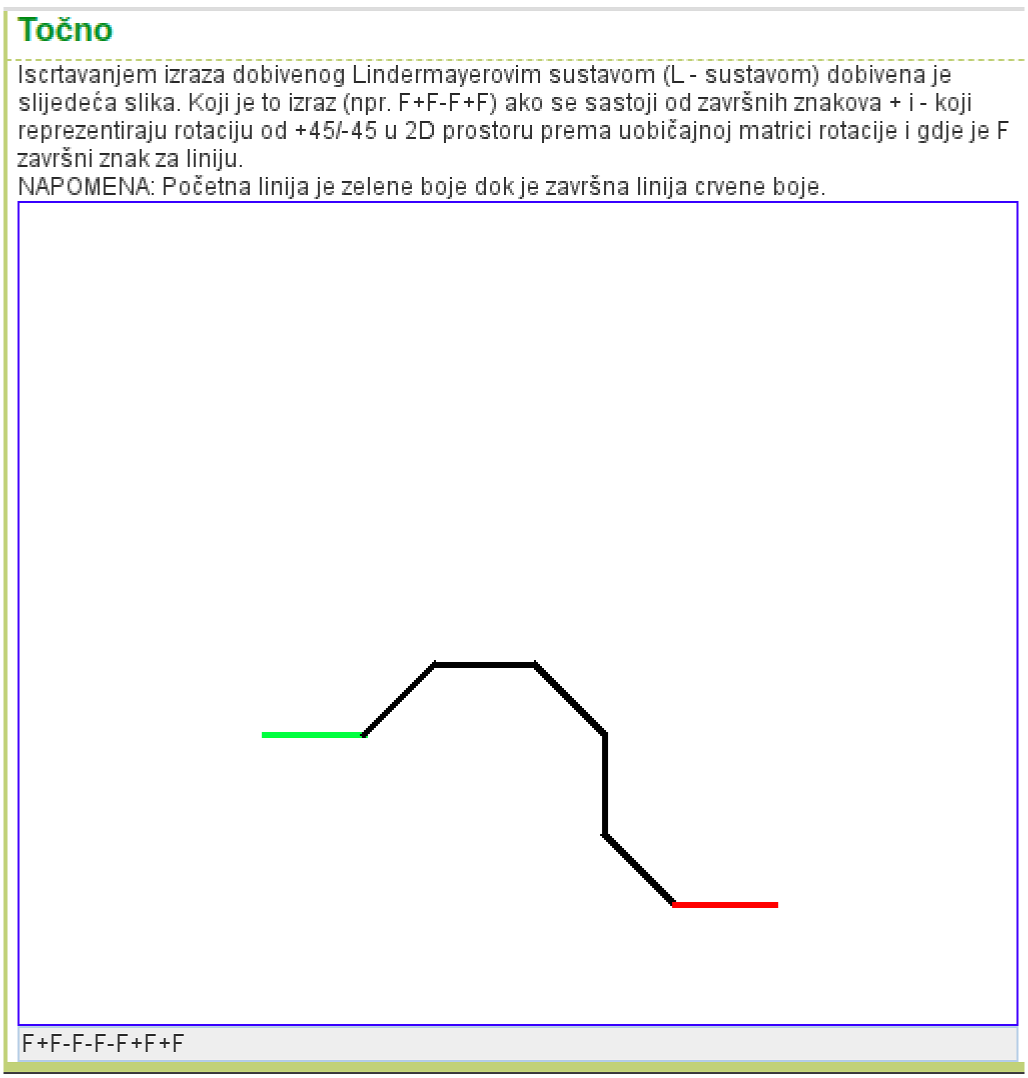
Sve o L-sustavima možete pronaći u knjizi na stranici 300 i nadalje. U knjizi



Slika 239: Zadatak

je lijepo opisano kako se koji znak interpretira.
F predstavlja kretanje od početne točke dužine do krajnje točke dužine.
$+$ predstavlja rotaciju od $+45°$, odnosno rotaciju u smjeru CCW
- predstavlja rotaciju od $-45°$, odnosno u smjeru CW.

Krenemo redom, nalazimo se u početnoj točki zelene linije i idemo prema krajnjoj točki zelene linije. Kada dođemo do krajnje točke upisujemo F. Sljedeće na redu je okret za $+45°$ u smjeru CCW. To znači da upisujemo $+$. Onda se nalazimo u početnoj točki prve crne linije. Kada dođemo do krajnje točke prve crne linije upisujemo F, onda radimo rotaciju za $-45°$ odnosno upisujemo -, itd.



Slika 240: Zadatak riješen

11 Novi zadaci

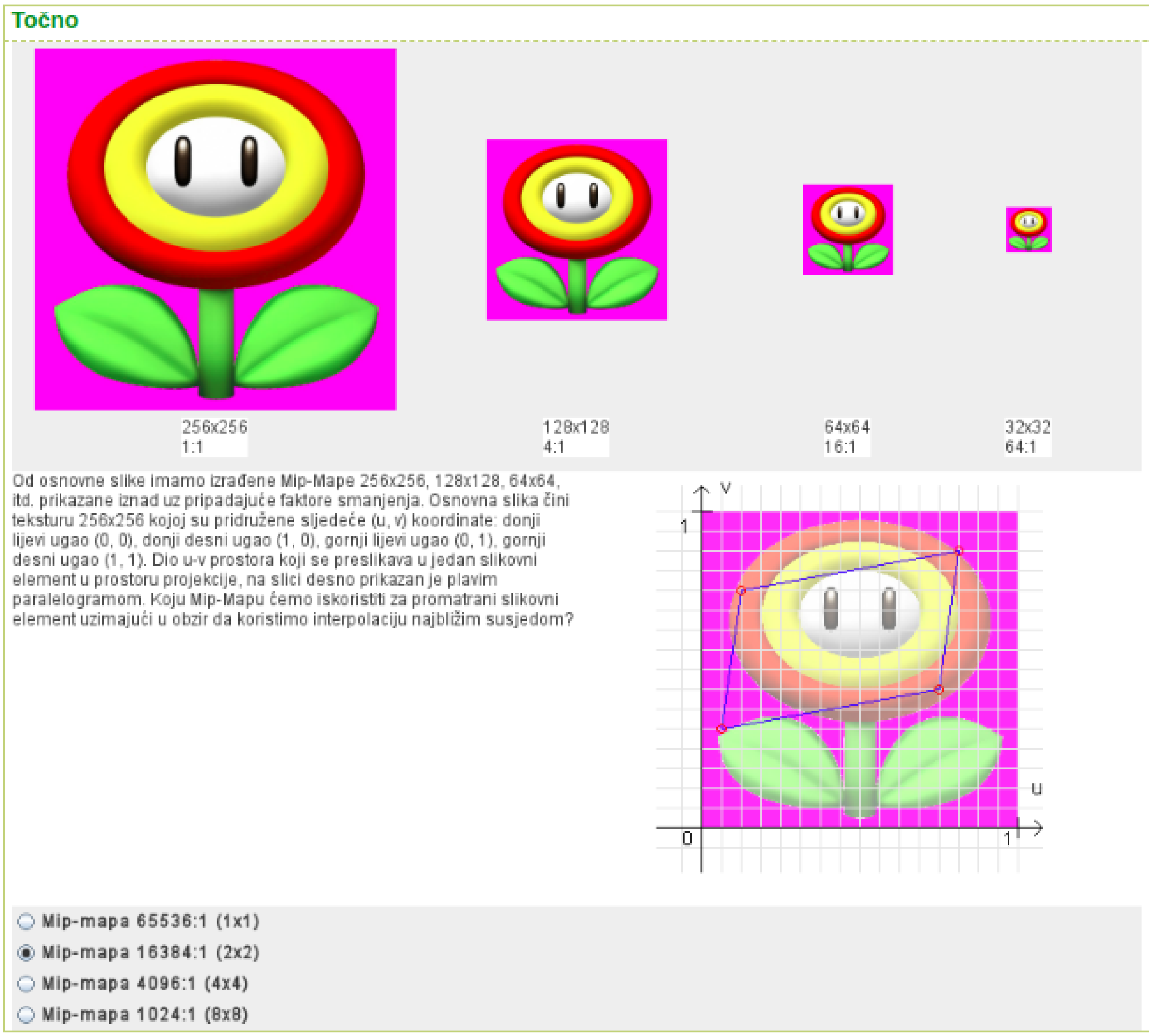
11.1 Mip-mape, odabir mapa

Dodatne informacije o mip-mapama možete pronaći u knjizi na stranici 274 i nadalje.

Mip-mape su sklopovski podržano teksturiranje objekta čija je jedna od zadaća uklanjanje aliasinga.
Kako riješiti zadatak? Kako piše da je slika zadana u koordinatnom sustavu mip-mapa 256×256, između 0 i 1 ima 16 kvadratića, znamo da svaki kvadratić ima površinu 16×16. Nadalje, izbrojimo koliko kvadratića se nalazi između lijeve točke poligona i desne. U ovom slučaju 11. Nakon toga izbrojimo koliko se kvadratića nalazi između gornje i donje točke poligona. U ovom slučaju 7. Sada izračunamo površinu poligona

$$P = 16 \cdot 16 \cdot 11 \cdot 8 = 22528$$

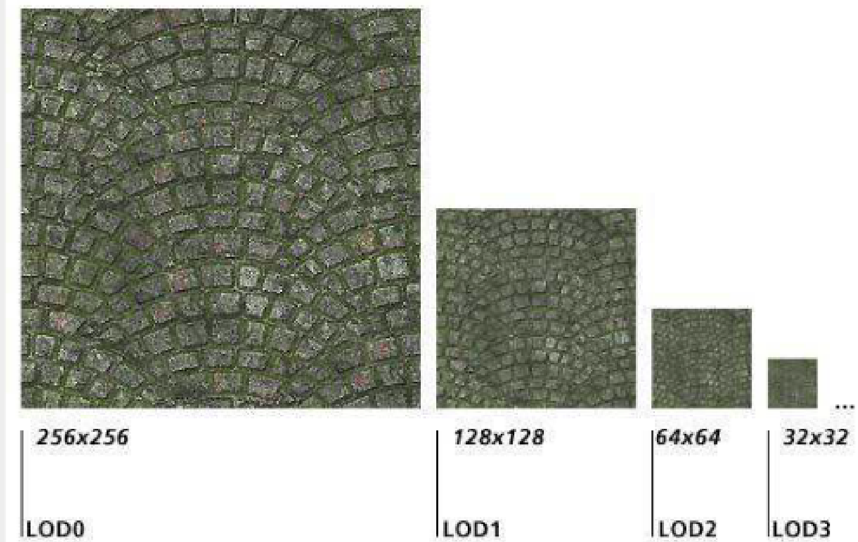
Pošto interpoliramo najbližim susjedom, uzimamo onu mip-mapu koja je bliža dobivenoj površini. U ovom slučaju to je Mip-mapa 16348:1 (2×2).



Slika 241: Zadatak riješen

11.2 Mip-mape, stvaranje mapa

Detaljnije o mip-mapa možete pronaći u prethodnom zadatku 11.1.



0.03	0.02	0.4	0.54	0.97	0.8	0.22	0.06
0.0	0.03	1.0	0.82	0.95	0.84	0.25	0.07
0.73	0.51	0.08	0.5	0.92	0.59	0.53	0.99
0.57	0.23	0.71	0.23	0.98	0.87	0.36	0.36
0.99	0.95	0.96	0.1	0.37	0.1	0.06	0.03
0.99	0.99	0.0	0.14	0.41	0.12	0.03	0.04
0.35	0.81	0.46	0.04	0.22	0.01	0.07	0.14
0.62	0.22	0.22	0.16	0.02	0.03	0.07	0.04

Prikazane su tri mip-mape za B komponentu slike. Lijevo je mip-mapa 8x8, dok je u sredini mip-mapa 4x4, te desno je mip-mapa 2x2. Zadatak je upisati u slobodno polje u desnoj 2x2 mip-mapi vrijednost dobivenu pomoću vrijednosti iz 8x8 mip-mape. Također treba upisati međurezultate iz 4x4 mip-mape pomoću kojih se dobilo krajnje rješenje. Očekuje se rješenje do dvije decimale. Nije potrebno rješiti cijelu 4x4 mip-mapu.
NAPOMENA: Unositi decimalne brojeve koristeći znak '.', npr. 0.53

Slika 242: Zadatak

Kako bismo otkrili koji broj se nalazi u gornjem lijevom kutu mip-mape 2×2, moramo otkriti što se nalazi u gornja 4 (naznačena bojama) kvadrata. A kako bismo otkrili što se nalazi u njima, izračunati aritmetičku sredinu označenih kvadrata u mip-mapi 8×8.
Crveno zaokruženi kvadrat će dati aritmetičku sredinu

$$AS = \frac{0.03 + 0.02 + 0.0 + 0.03}{4} = 0.02$$

te to upisujemo u prvi od 4 kvadrata. Tako nastavljamo dalje i rješenje je

Točno

0.03	0.02	0.4	0.54	0.97	0.8	0.22	0.06
0.0	0.03	1.0	0.82	0.95	0.84	0.25	0.07
0.73	0.51	0.08	0.5	0.92	0.59	0.53	0.99
0.57	0.23	0.71	0.23	0.98	0.87	0.36	0.36
0.99	0.95	0.96	0.1	0.37	0.1	0.06	0.03
0.99	0.99	0.0	0.14	0.41	0.12	0.03	0.04
0.35	0.81	0.46	0.04	0.22	0.01	0.07	0.14
0.62	0.22	0.22	0.16	0.02	0.03	0.07	0.04

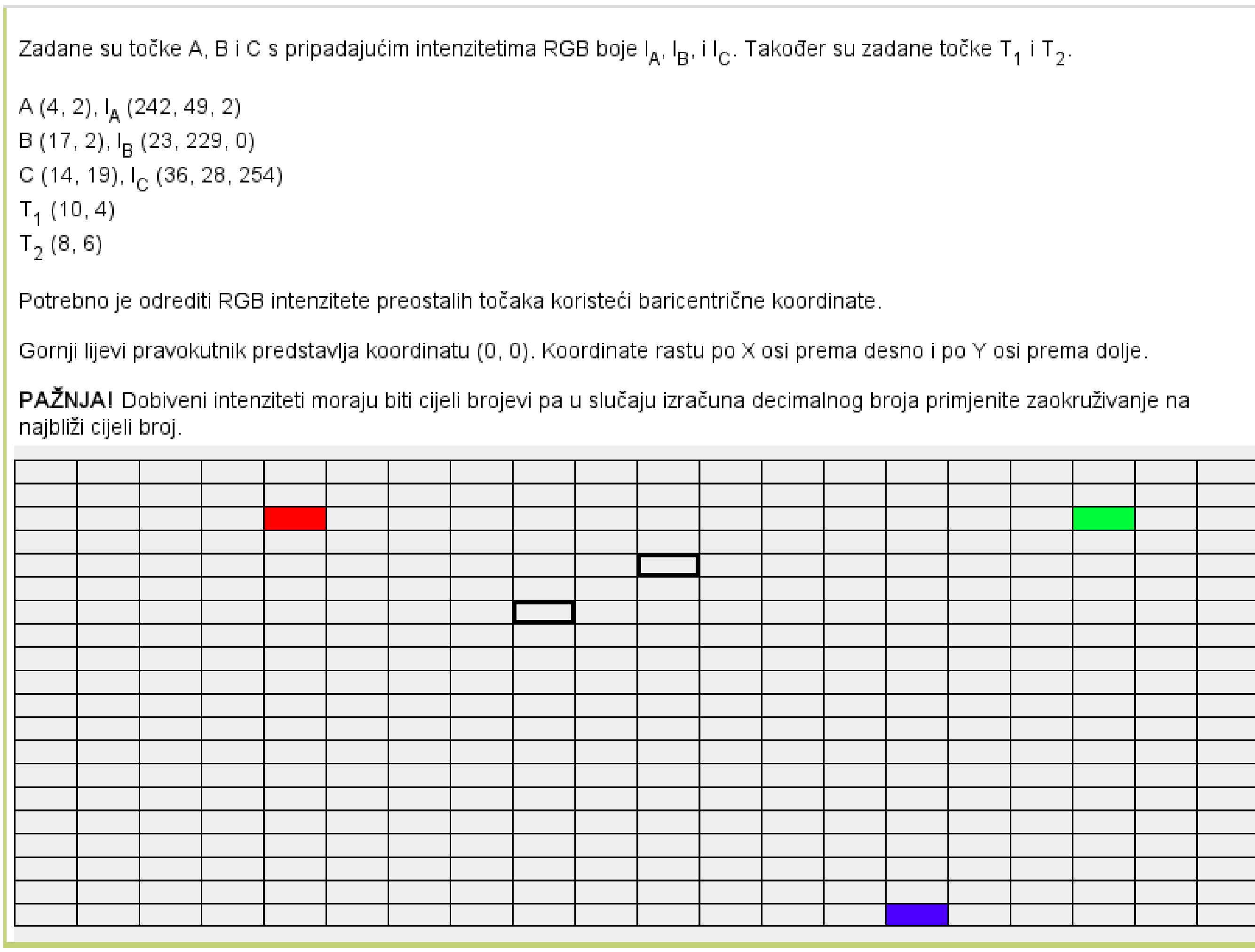
0.02	0.69		
0.51	0.38		

0.4	

Prikazane su tri mip-mape za R komponentu slike. Lijevo je mip-mapa 8x8, dok je u sredini mip-mapa 4x4, te desno je mip-mapa 2x2. Zadatak je upisati u slobodno polje u desnoj 2x2 mip-mapi vrijednost dobivenu pomoću vrijednosti iz 8x8 mip-mape. Također treba upisati međurezultate iz 4x4 mip-mape pomoću kojih se dobilo krajnje rješenje. Očekuje se rješenje do dvije decimale. Nije potrebno rješiti cijelu 4x4 mip-mapu.

Slika 243: Zadatak riješen

11.3 Interpolacija boje baricentričnim koordinatama



Zadane su točke A, B i C s pripadajućim intenzitetima RGB boje I_A, I_B, i I_C. Također su zadane točke T_1 i T_2.

A (4, 2), I_A (242, 49, 2)
B (17, 2), I_B (23, 229, 0)
C (14, 19), I_C (36, 28, 254)
T_1 (10, 4)
T_2 (8, 6)

Potrebno je odrediti RGB intenzitete preostalih točaka koristeći baricentrične koordinate.

Gornji lijevi pravokutnik predstavlja koordinatu (0, 0). Koordinate rastu po X osi prema desno i po Y osi prema dolje.

PAŽNJA! Dobiveni intenziteti moraju biti cijeli brojevi pa u slučaju izračuna decimalnog broja primjenite zaokruživanje na najbliži cijeli broj.

Slika 244: Zadatak

Za ovaj zadatak je prvo potrebno izračunati baricentrične koordinate zadanih točaka. Poslije toga je potrebno pomoću tih baricentričnih koordinate izračunati intenzitete u točkama. Zapravo je ovo kombinacvija 3.1.3 i 6.1.6.

Prvo ćemo izračunati baricentrične koordinate

$$\begin{bmatrix}10\\4\end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix}17\\2\end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix}14\\9\end{bmatrix}$$

Iz toga dobijemo dvije jednadžbe s tri nepoznanice

$$4t_1 + 17t_2 + 14t_3 = 10$$

$$2t_1 + 2t_2 + 19t_3 = 4$$

treća jednadžba je ta da zbroj sve tri baricentrične koordinate mora biti 1

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

Kao rješenje se dobiju

$$t_1 = \frac{113}{221}$$

$$t_2 = \frac{82}{221}$$

$$t_3 = \frac{2}{17}$$

Preporuka je ostaviti u razlomku jer se dobiju najtočnija rješenja.
Sad kada imamo baricentrične koordinate, napravit ćemo interpolaciju pomoći njih koristeći intenzitete u vrhovima, na isti način

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \frac{113}{221} \cdot \begin{bmatrix} 242 \\ 49 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{82}{221} \cdot \begin{bmatrix} 23 \\ 229 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{17} \cdot \begin{bmatrix} 36 \\ 28 \\ 254 \end{bmatrix}$$

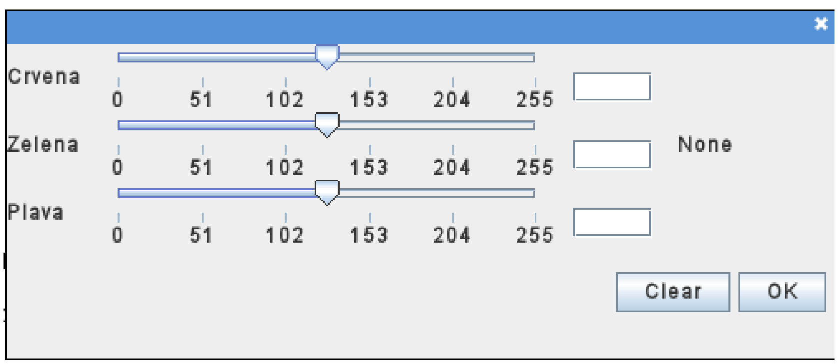
Rješenja su

$$R = 137$$

$$G = 113$$

$$B = 31$$

Rješenja moraju biti cijeli brojevi jer je tako zadano u zadatku. Kada kliknemo na vrh, otvori se prozor u koji treba upisati RGB komponentu



Slika 245: Prozor za upis

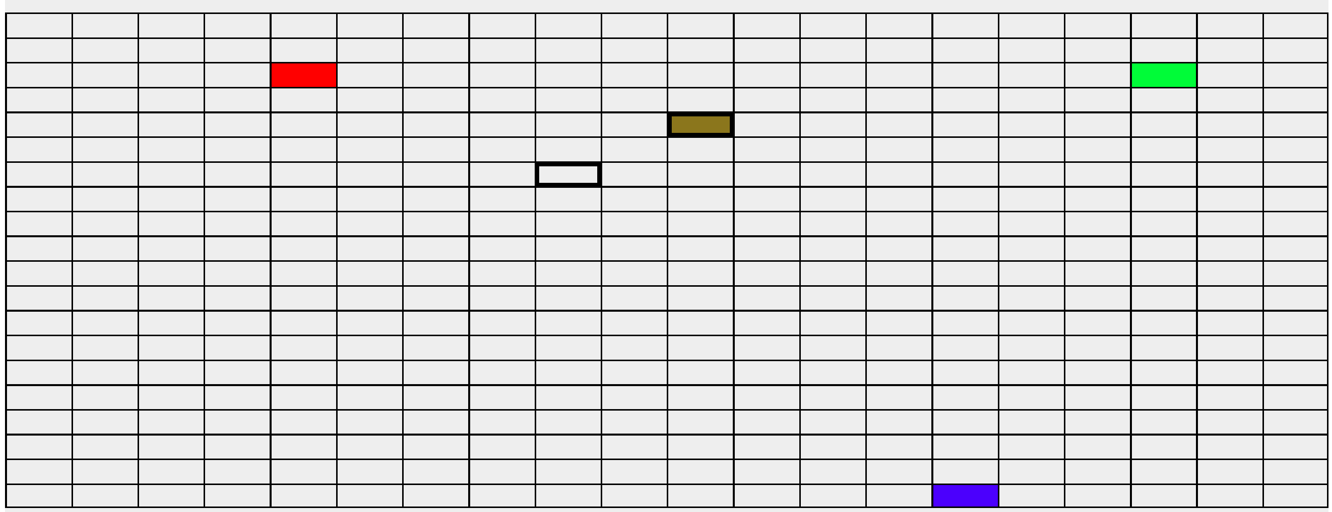
Zadane su točke A, B i C s pripadajućim intenzitetima RGB boje I_A, I_B, i I_C. Također su zadane točke T_1 i T_2.

A (4, 2), I_A (242, 49, 2)
B (17, 2), I_B (23, 229, 0)
C (14, 19), I_C (36, 28, 254)
T_1 (10, 4)
T_2 (8, 6)

Potrebno je odrediti RGB intenzitete preostalih točaka koristeći baricentrične koordinate.

Gornji lijevi pravokutnik predstavlja koordinatu (0, 0). Koordinate rastu po X osi prema desno i po Y osi prema dolje.

PAŽNJA! Dobiveni intenziteti moraju biti cijeli brojevi pa u slučaju izračuna decimalnog broja primjenite zaokruživanje na najbliži cijeli broj.



Slika 246: Izgled nakon upisa RGB prve točke

Istu stvar radimo za drugu točku.
Rješenja za drugu točku su

$$t_1 = \frac{141}{221}$$

$$t_2 = \frac{28}{221}$$

$$t_3 = \frac{4}{17}$$

$$R = 166$$

$$G = 67$$

$$B = 61$$

Točno

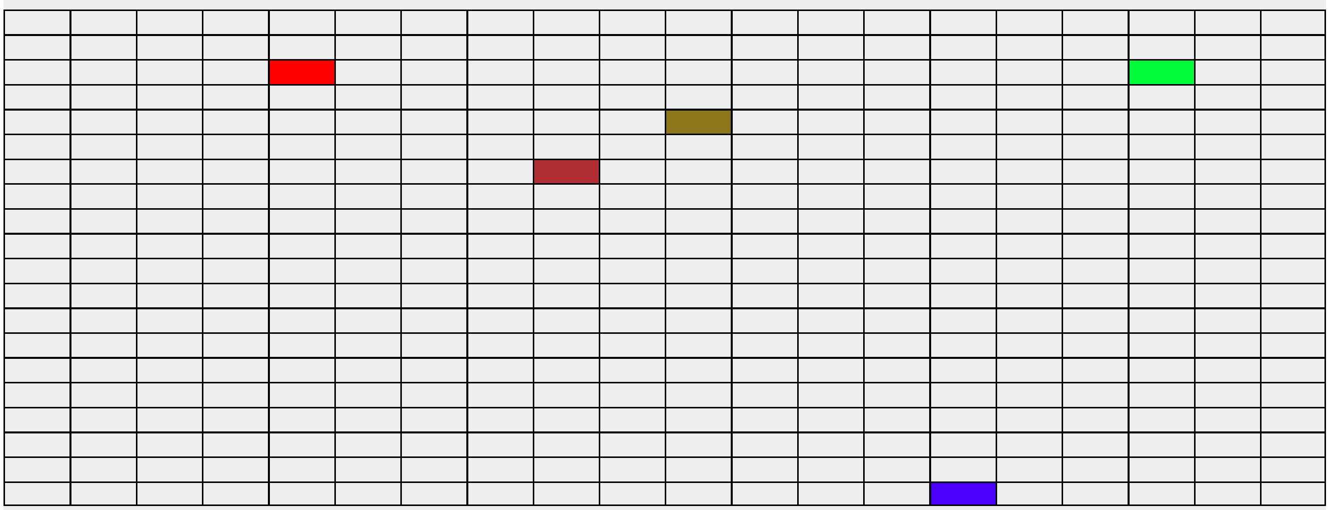
Zadane su točke A, B i C s pripadajućim intenzitetima RGB boje I_A, I_B, i I_C. Također su zadane točke T_1 i T_2.

A (4, 2), I_A (242, 49, 2)
B (17, 2), I_B (23, 229, 0)
C (14, 19), I_C (36, 28, 254)
T_1 (10, 4)
T_2 (8, 6)

Potrebno je odrediti RGB intenzitete preostalih točaka koristeći baricentrične koordinate.

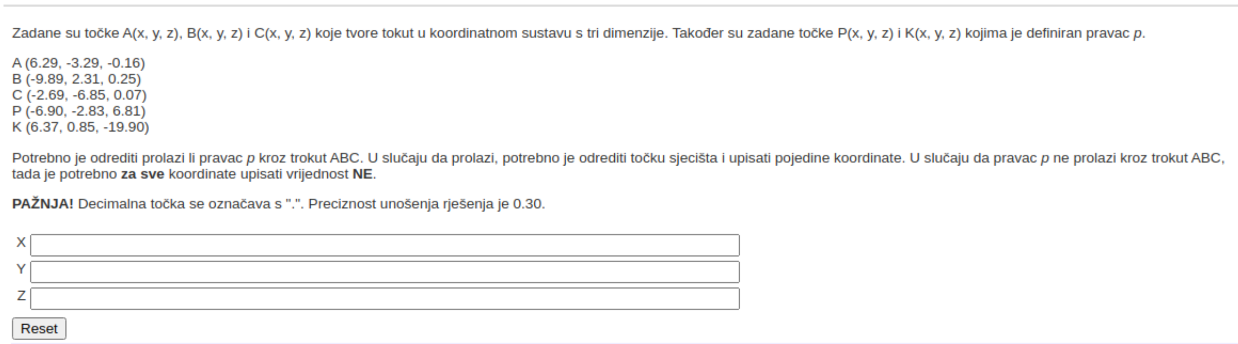
Gornji lijevi pravokutnik predstavlja koordinatu (0, 0). Koordinate rastu po X osi prema desno i po Y osi prema dolje.

PAŽNJA! Dobiveni intenziteti moraju biti cijeli brojevi pa u slučaju izračuna decimalnog broja primjenite zaokruživanje na najbliži cijeli broj.



Slika 247: Zadatak riješen

11.4 Probodište pravca kroz trokut


Zadane su točke A(x, y, z), B(x, y, z) i C(x, y, z) koje tvore tokut u koordinatnom sustavu s tri dimenzije. Također su zadane točke P(x, y, z) i K(x, y, z) kojima je definiran pravac *p*.

A (6.29, -3.29, -0.16)
B (-9.89, 2.31, 0.25)
C (-2.69, -6.85, 0.07)
P (-6.90, -2.83, 6.81)
K (6.37, 0.85, -19.90)

Potrebno je odrediti prolazi li pravac *p* kroz trokut ABC. U slučaju da prolazi, potrebno je odrediti točku sjecišta i upisati pojedine koordinate. U slučaju da pravac *p* ne prolazi kroz trokut ABC, tada je potrebno **za sve** koordinate upisati vrijednost **NE**.

PAŽNJA! Decimalna točka se označava s ".". Preciznost unošenja rješenja je 0.30.

X
Y
Z
Reset

Slika 248: Zadatak

Ideja je sljedeća, odrediti jednadžbu pravca koji prolazi točkama P i K (3.2.1), nakon toga odrediti jednadžbu ravnine u kojoj leži trokut (3.2.3). Nakon toga odrediti sjecište ravnine i pravca (3.2.8). Kad smo odredili sjecišta, uz pomoć baricentričnih koordinata provjeriti je li sjecište u trokutu (6.1.1).

Jednadžba pravca je

$$p = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13.27 & 3.68 & -26.71 \\ -6.90 & -2.83 & 6.81 \end{bmatrix}$$

Odnosno

$$x = 13.27t - 6.9$$

$$y = 3.68t - 2.83$$

$$z = -26.71t + 6.81$$

Nakon toga određujemo jednadžbu ravnine. Normala n ravninu je

$$\vec{n} = (B - A) \times (C - A)$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2.7476 \\ 0.0396 \\ 107.8888 \end{bmatrix}$$

što znači da imamo jednadžbu ravnine oblika

$$2.7476x + 0.0396y + 107.8888z + D = 0$$

D ćemo izračunati tako da točku A uvrstimo u jednadžbu ravnine

$$D = 0.110088$$

Sada kada imamo jednadžbu ravnine, x, y i z pravca uvrstimo u jednadžbu ravnine i dobijemo t

$$t = 0.2516$$

Kada dobiveni t uvrstimo u jednadžbu pravca dobijemo točke

$$x = -3.56$$

$$y = -1.9$$

$$z = 0.09$$

No sad još uvijek ne znamo leži li dobivena točka u trokutu. Iskoristit ćemo baricentrične koordinate kako bismo to odredili

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} + t_3 \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix}$$

Kada uvrstimo brojeve, dobijemo tri jednadžbe s tri nepoznanice

$$6.29t_1 - 9.89t_2 - 2.69t_3 = -3.56$$

$$-3.29t_1 + 2.31t_2 - 6.85t_3 = -1.9$$

$$-0.16t_1 + 0.25t_2 + 0.07t_3 = 0.09$$

Ali kako bi bilo najsigurnije rješenje, umjesto jedne od tri jednadžbe (npr. posljednje) ćemo koristiti

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

Za rješenja se dobije

$$t_1 = 0.26$$

$$t_2 = 0.44$$

$$t_3 = 0.3$$

Iz čega zaključujemo da dobivena točka leži u trokutu, tj. pravac siječe trokut.

Točno Relativni doprinos: 1.0/1.0

Zadane su točke A(x, y, z), B(x, y, z) i C(x, y, z) koje tvore tokut u koordinatnom sustavu s tri dimenzije. Također su zadane točke P(x, y, z) i K(x, y, z) kojima je definiran pravac *p*.

A (6.29, -3.29, -0.16)
B (-9.89, 2.31, 0.25)
C (-2.69, -6.85, 0.07)
P (-6.90, -2.83, 6.81)
K (6.37, 0.85, -19.90)

Potrebno je odrediti prolazi li pravac *p* kroz trokut ABC. U slučaju da prolazi, potrebno je odrediti točku sjecišta i upisati pojedine koordinate. U slučaju da pravac *p* ne prolazi kroz trokut ABC, tada je potrebno **za sve** koordinate upisati vrijednost **NE**.

PAŽNJA! Decimalna točka se označava s ".". Preciznost unošenja rješenja je 0.30.

X -3.56
Y -1.9
Z 0.09

Slika 249: Zadatak riješen